勾股定理證明-A105

【作輔助圖】

1. 在直角三角形ABC的$\overline{AB}$邊上向外作任意的三角形ABD。

2. 分別在$\overline{BC},\overline{AC}$上向外作$\angle CBF=\angle ACE=\angle BAD,\angle BCF=\angle CAE=\angle ABD$。

3. 分別從E點作$\overline{AC}$的平行線，過F點作$\overline{BC}$的平行線，且兩平行線交於P點。

4. 延長$\overline{BC}$交$\overline{PE}$於H點，在$\overline{AC}$邊上以$\overline{AC}$為長，$\overline{CH}$為寬作矩形$GACH$；接著延長

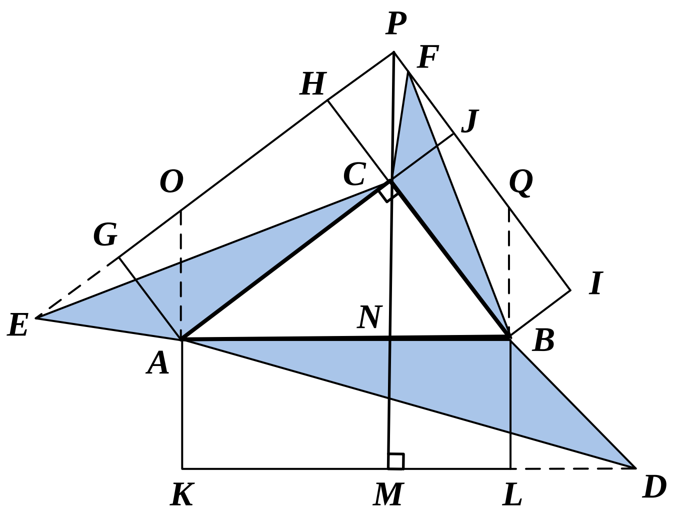
   $\overline{AC}$交$\overrightarrow{PF}$於J點，在$\overline{BC}$邊上以$\overline{BC}$為長，$\overline{CJ}$為寬作矩形$CBIJ$。

5. 連接$\overline{PC}$，並作$\overline{AK},\overline{BL}$皆與$\overline{PC}$平行且等長。

6. 連接K、L、D點，得到第三個四邊形$AKLB$。

7. 延長$\overline{PC}$交$\overline{AB}$於N點，交$\overline{KL}$於M點。

8. 分別將$\overline{KA}$延長交$\overline{EP}$於O點、將$\overline{LB}$延長交$\overline{IP}$於Q點。



【求證過程】

直角三角形ABC的三邊上有三個相似的三角形，利用其面積比等於所對應的矩形面積比，按帕普斯（Pappus）定理【註: 補充說明】所指示的方式推得較小的兩個相似三角形面積和等於最大的相似三角形面積之關係，最後推得勾股定理的關係式。

1. 首先說明三角形CPH相似於三角形ABC，利用對應邊成比例的性質推得邊長關係：
   因為$\angle CBF=\angle ACE, \angle BCF=\angle CAE$，所以$\Delta BCF\sim\Delta CAE$（AA 相似），推得
   $$\overline{BI}:\overline{AG}=\overline{BC}:\overline{AC}.$$
   因此，$\overline{HP}:\overline{HC}=\overline{BI}:\overline{AG}=\overline{BC}:\overline{AC}=a:b$及$\angle CHP=\angle ACB=90°$，所以
   $$\Delta CPH\sim\Delta ABC\text{（SAS 相似）}.$$
   故推得
   $$\overline{PC}:\overline{HP}:\overline{HC}=\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{AC}=\mathrm{c}:a:b.$$

2. 證明連接K、L、D點得到第三個四邊形$AKLB$為一矩形：

   由第 1 點結論可知$\angle HCP=\angle CAB$，又因為$\overline{EP}//\overline{AC}$，得到$\angle HPC=\angle ACN$ (同位角相等)，所以$\angle ANC=180°-\angle CAB-\angle ACN=180°-\angle HCP-\angle HPC=\angle CHP=90°,$

   因為$\overline{AO}//\overline{PM}//\overline{QL}$，所以$\angle KAN=\angle ANC=\angle NBL=90°$(內錯角相等)，所以四邊形$AKLB$為一矩形。

3. 由三角形ABD、三角形BCF、三角形CAE的相似關係，可得三個三角形的面積比等比於其對應的邊長平方比：
   因為$\angle CBF=\angle ACE=\angle BAD, \angle BCF=\angle CAE=\angle ABD$，所以
   $$\Delta ABD\sim\Delta BCF\sim\Delta CAE\text{（AA 相似）}.$$
   由第 1 點結論可知，可假設$\overline{PC}=\mathrm{c}t, \overline{HP}=at, \overline{HC}=bt$，且$\overline{PC}=\overline{AK}=\overline{BL}$，所以

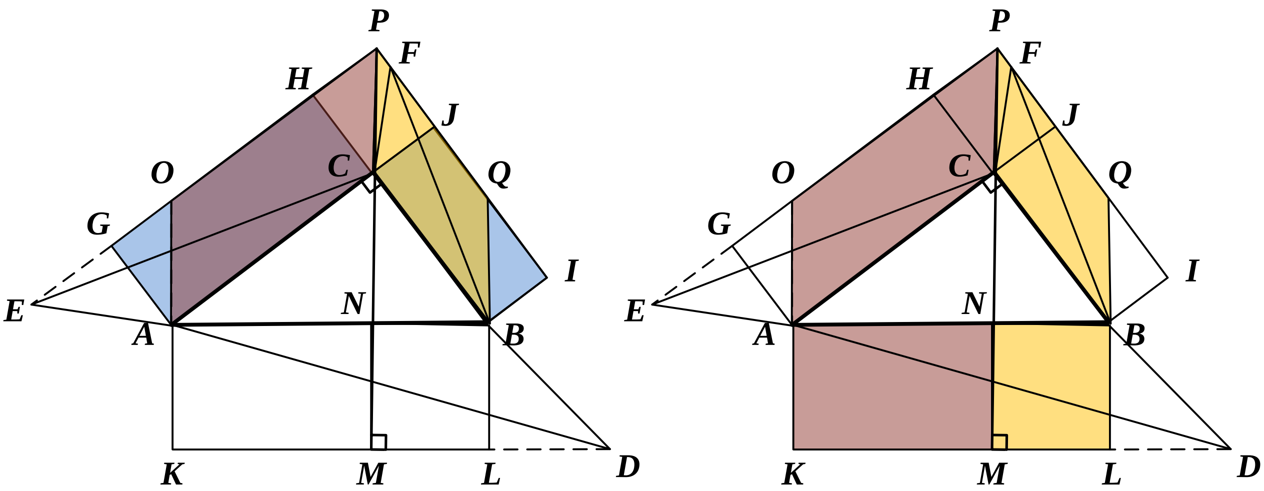
   $\overline{AK}=\overline{BL}=\overline{PC}=ct$，因此

   $$\begin{aligned}\Delta ABD:\Delta BCF:\Delta CAE&=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AK}:\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{HP}:\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{HC}\\&=\frac{1}{2}c\cdot(ct):\frac{1}{2}a\cdot(at):\frac{1}{2}b\cdot(bt)\\&=c^2:a^2:b^2.\end{aligned}$$

4. 利用帕普斯（Pappus）定理，證明較小的兩個矩形面積和等於最大的矩形面積：

   因為$\overline{AK}=\overline{BL}=\overline{PC}$且$\overline{AK}//\overline{BL}//\overline{PC}$，所以

$$\square GACH + \square CBIJ = \square ACPO + \square BCPQ \text{ (等底同高)}$$
$$= \overline{PC} \times \overline{AN} + \overline{PC} \times \overline{BN}$$
$$= \overline{PC} \times (\overline{AN} + \overline{BN})$$
$$= \overline{AK} \times \overline{AB}$$
$$= \square AKLB$$



Pappus 定理的面積證明法

5. 利用矩形 $AKLB$ 為矩形 $GACH$ 與矩形 $CBIJ$ 的面積和關係，推得三角形 ABD 亦為三角形 BCF 與三角形 CAE 的面積和，最後推得勾股定理的關係式。

   由第 5 點結論可知：

$$\square AKLB = \square GACH + \square CBIJ$$
$$\overline{AB} \times \overline{AK} = \overline{BC} \times \overline{BI} + \overline{AC} \times \overline{AG}$$

   將式子同乘上 $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{BC} \times \overline{BI} + \frac{1}{2}\overline{AC} \times \overline{AG}$$

   得到

$$\Delta ABD = \Delta BCF + \Delta CAE$$

   由第 3 點結論可知：

$$\Delta ABD : \Delta BCF : \Delta CAE = c^2 : a^2 : b^2.$$

   即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

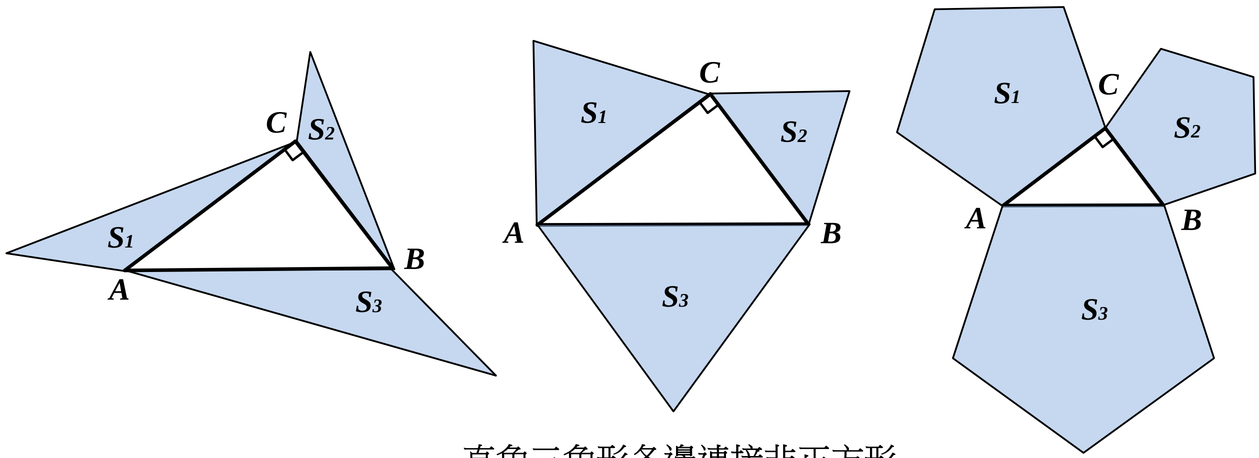
【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1933 年 12 月 7 日想到的。

2. 心得：

(1) 由帕普斯（Pappus）定理證明勾股定理，亦可發現以直角三角形三邊向外延伸的圖形不一定是正方形，只要是相似之形狀，仍有面積和之關係。

(2) 在《勾股定理》這本書的 A106、A108 證明直角三角形三邊向外延伸為三個相似的任意三角形與等腰三角形、正五邊形的例子，亦成立直角三角形斜邊延伸的圖形面積，會等於另外兩個邊所延伸出圖形面積的和之關係。



直角三角形各邊連接非正方形

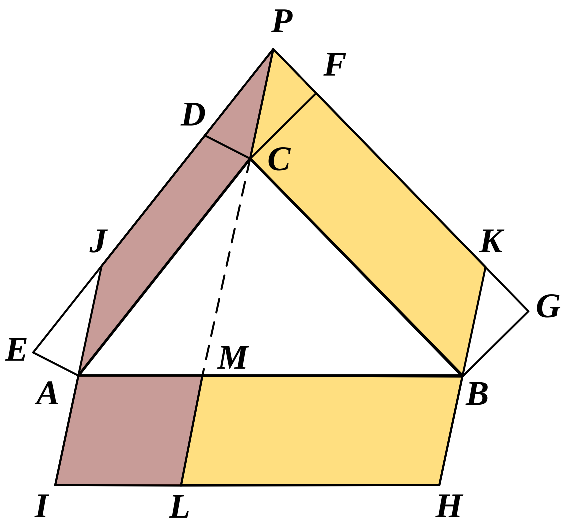
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
	●	●		

4. 補充說明：帕普斯（Pappus）定理：

帕普斯（Pappus）是西元三世紀的一位希臘數學家，在他的《數學匯編》(Mathematical Collection Book IV)敘述：假設 ABC 是一個任意三角形，$ACDE$ 及 $BCFG$ 分別是在 $\overline{AC}, \overline{BC}$ 邊上的任意平行四邊形，延伸 $\overline{ED}$ 及 $\overline{GF}$ 使其交於 P 點，並作 $\overline{AI}$, $\overline{BH}$ 皆與 $\overline{PC}$ 平行且等長，則：

$$\square ABHI\text{面積} = \square ACDE\text{面積} + \square BCFG\text{面積}.$$



Pappus 定理的圖例

【證明過程】

(1) 將 $\overline{IA}$ 延長交 $\overline{EP}$ 於 J 點，將 $\overline{HB}$ 延長交 $\overline{GP}$ 於 K 點。

因為 $\overline{JA}//\overline{PC}$, $\overline{AE}//\overline{CD}$, $\overline{EP}//\overline{AC}$ ，得到

$\angle AEJ = \angle CDP, \angle EAJ = \angle DCP$, $\overline{AE} = \overline{CD}$ ，所以 $\Delta AEJ \cong \Delta CDP$

（ASA 全等)，因此 $\overline{JA} = \overline{PC} = \overline{AI}$;

同理可證 $\Delta BGK \cong \Delta CFP$（ASA 全等)， $\overline{KB} = \overline{PC} = \overline{BH}$ 。

(2) 延長 $\overline{PC}$ 交 $\overline{AB}$ 於 M 點，交 $\overline{IH}$ 於 L 點， $\overline{JI}//\overline{PL}, \overline{KH}//\overline{PL}$ ，則：

$\square ACDE + \square BCFG$ (等底同高)

$= \square ACPJ + \square BCPK$

$= \square AMLI + \square MBHL$ (因為 $\overline{AI} = \overline{BH} = \overline{PC}$, 所以等底同高)

$= \square ABHI$