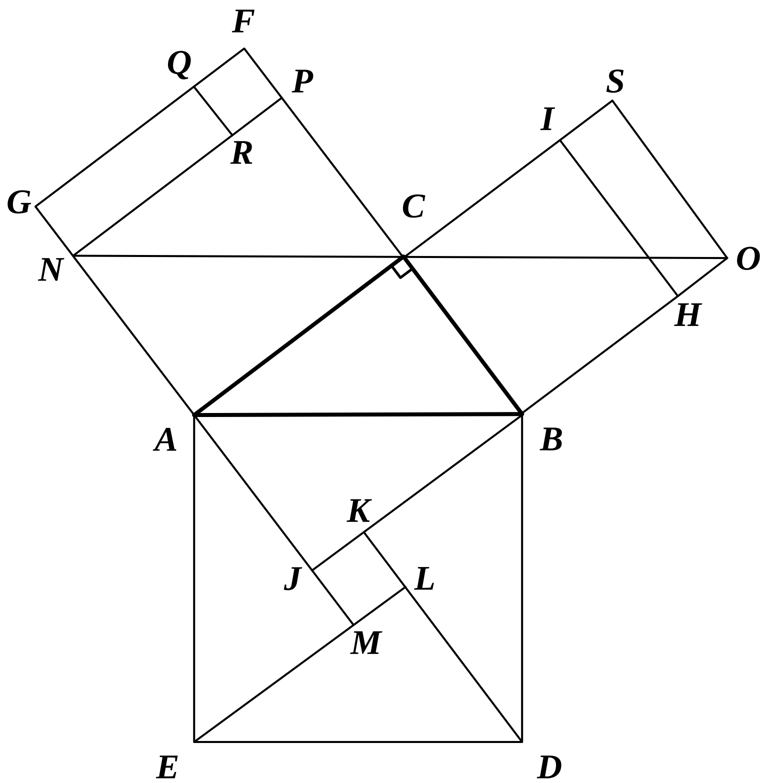
勾股定理證明-A103

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{AB}$為邊長，向外作一正方形$ABDE$；以$\overline{AC}$為邊長，向外作一正方形$ACFG$；以$\overline{BC}$為邊長，向外作一正方形$CBHI$。
2. 分別從A點作$\overline{AM}$平行於$\overline{BC}$，從D點作$\overline{DK}$平行於$\overline{BC}$，從B點作$\overline{BJ}$平行於$\overline{AC}$，從E點作$\overline{EL}$平行於$\overline{AC}$。
3. 從C點作$\overline{AB}$的平行線，且交$\overline{AG}$於N點、交$\overline{BH}$的延長線於O點。
4. 從O點作$\overline{OS}$平行於$\overline{BC}$，且$\overline{OS}=\overline{BC}$，連接$\overline{CS}$。
5. 在$\overline{CF}$上取$\overline{CP}=\overline{BC}$，連接$\overline{PN}$。
6. 在$\overline{GF}$上取$\overline{GQ}=\overline{BC}$，從$Q$點作$\overline{GN}$的平行線，交$\overline{NP}$於$R$點。



【求證過程】

直角三角形ABC的三邊上分別向外作三個正方形並繪製切割區塊，先證明切割區

塊的全等，將三個正方形以切割出的區塊表示其面積，透過代數上的運算，推得兩個正方形的面積和相等於正方形 $ABDE$ 面積，即可推得勾股定理。

1. 首先證明正方形 $ABDE$ 中哪些三角形與三角形 ABC 全等：

   因為 $\overline{BJ}//\overline{AC}$，所以 $\angle ABJ=\angle BAC$，與 $\overline{AJ}//\overline{BC}$，所以 $\angle BAJ=\angle ABC$，又 $\overline{AB}=\overline{AB}$

   $$\Delta ABC\cong\Delta BAJ \text{（ASA 全等）}.$$

   由 $\overline{BJ}//\overline{EL}//\overline{AC}$ 與 $\overline{AM}//\overline{DK}//\overline{BC}$ 的平形關係可知四邊形 $JKLM$ 的四頂角皆為直角的正方形，所以進一步可推：

   因為 $\angle BKD=\angle AJB=90^{\circ}$，$\angle KBD=90^{\circ}-\angle ABJ=\angle JAB$，$\overline{BD}=\overline{AB}$，所以

   $$\Delta DBK\cong\Delta BAJ \text{（AAS 全等）}.$$

   同理，由 $\overline{AB}=\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EA}$ 與平行關係得到對應角相等，可證明

   $$\Delta ABC\cong\Delta BAJ\cong\Delta DBK\cong\Delta EDL\cong\Delta AEM.$$

2. 接著證明圖中哪些三角形亦與三角形 ABC 全等：

   因為 $\overline{NC}//\overline{AB}$ 及 $\overline{AN}//\overline{BC}$，所以 $NABC$ 為平行四邊形，$\overline{AC}$ 為其對角線，使得

   $$\Delta ABC\cong\Delta CNA.$$

   同理，因為 $\overline{CO}//\overline{AB}$ 及 $\overline{BO}//\overline{AC}$，所以 $ABOC$ 為平行四邊形，$\overline{BC}$ 為其對角線，使得

   $$\Delta ABC\cong\Delta OCB.$$

   接著，因為 $\overline{NC}=\overline{AB},\angle NCP=\angle ABC,\overline{CP}=\overline{BC}$，所以

   $$\Delta NCP\cong\Delta ABC \text{（SAS 全等）}.$$

   同理，因為 $\angle SCO=\angle CAB,\angle CSO=\angle ACB,\overline{OS}=\overline{BC}$，所以

   $$\Delta COS\cong\Delta ABC \text{（AAS 全等）}.$$

   綜合上述可得到

   $$\Delta ABC\cong\Delta CNA\cong\Delta NCP\cong\Delta OCB\cong\Delta COS.$$

3. 說明矩形 $GNRQ$ 與矩形 $IHOS$ 面積相等，及正方形 $JKLM$ 與正方形 $QRPF$ 面積相等：

   因為矩形 $GNRQ$ 中的 $\overline{GN}=\overline{AG}-\overline{AN}=b-a,\overline{GQ}=\overline{BC}=a$，矩形 $HOSI$ 中的

   $\overline{IS}=\overline{CS}-\overline{CI}=b-a,\overline{IH}=\overline{BC}=a$，所以

$$\text{▭}GNRQ = \text{▭}IHOS = a(b-a).$$

因為四邊形 $QRPF$ 中的 $\overline{QF} = \overline{GF} - \overline{GQ} = b-a, \overline{PF} = \overline{CF} - \overline{CP} = b-a$ ，所以四邊形 $QRPF$ 為一邊長皆為 $b-a$ 的正方形，又正方形 $JKLM$ 的四邊長皆為 $b-a$ ，所以

$$\square QRPF = \square JKLM = (b-a)^2.$$

4. 分別求出三個正方形的面積表示式，將等式整理推論出勾股定理的相關式：
   由圖及上述證明可知：

$$\begin{aligned}
\square ACFG &= \Delta CNA + \Delta NCP + \square QRPF + \text{▭}GNRS \\
&= 2\,\Delta ABC + \square JKLM + \text{▭}GNRS. \\
\square CBHI &= \Delta OCB + \Delta COS - \text{▭}IHOS \\
&= 2\,\Delta ABC - \text{▭}GNRS. \\
\square ABDE &= \Delta BAJ + \Delta DBK + \Delta EDL + \Delta AEM + \square JKLM \\
&= 4\Delta ABC + \square JKLM \\
&= 4\Delta ABC + \square JKLM.
\end{aligned}$$

5. 試圖將較小的兩正方形面積相加，整理等式，即可推得勾股定理：

$$\begin{aligned}
\square ACFG + \square CBHI &= \left(2\,\Delta ABC + \square JKLM + \text{▭}GNRS\right) + \left(2\,\Delta ABC - \text{▭}GNRS\right) \\
&= 4\Delta ABC + \square JKLM \\
&= \square ABDE,
\end{aligned}$$

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$, 正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$, 正方形 $CBHI$ 邊長為 $\overline{BC}$,

所以可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Benj. F. Yanney and James. A.(1858). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly, 1*(2), 361.
2. 心得：此證明在建立輔助線時，以切割出直角三角形 ABC 為主，將兩個較小的正方形的切割區塊平移至大正方形，巧妙的利用了拼圖方式及代數運算，即可得到了三個正方形面積之間的勾股定理關係，故魯米斯將此證明歸類在代數-幾何證明部分。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	