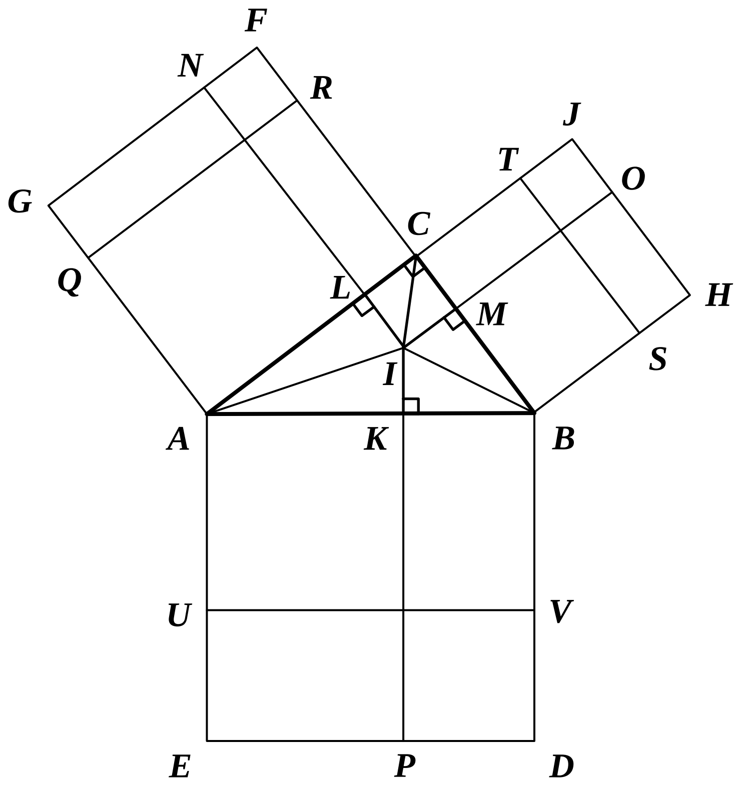
勾股定理證明-A102

【作輔助圖】

1. 分別以 $\overline{AB}$ 為邊長，向外作一正方形 $ABDE$；以 $\overline{AC}$ 為邊長，向外作一正方形 $ACFG$；以 $\overline{BC}$ 為邊長，向外作一正方形 $CBHJ$。
2. 分別作角 A、角 B、角 C 的角平分線，且相交於 I 點。
3. 從 I 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AB}$ 於 K 點、交 $\overline{ED}$ 於 P 點。
4. 從 I 點作 $\overline{AC}$ 的垂線，交 $\overline{AC}$ 於 L 點、交 $\overline{GF}$ 於 N 點。
5. 從 I 點作 $\overline{BC}$ 的垂線，交 $\overline{BC}$ 於 M 點、交 $\overline{HJ}$ 於 O 點。
6. 在 $\overline{AG}$ 上取 Q 點，在 $\overline{AE}$ 上取 U 點，使得 $\overline{AQ}=\overline{AU}=\overline{AK}$，再從 Q 點作 $\overline{AC}$ 的平行線，交 $\overline{CF}$ 於 R 點，從 U 點作 $\overline{AB}$ 的平行線，交 $\overline{BD}$ 於 V 點。
7. 在 $\overline{BH}$ 上取 S 點，使得 $\overline{BS}=\overline{BM}$，再從 S 點作 $\overline{BC}$ 的平行線，交 $\overline{CJ}$ 於 T 點。



【求證過程】

先證明三角形全等，推得其邊長相等關係，並將三個正方形技巧性地切割，計算其面積參數式，由代數上的運算，推得正方形 $ABDE$ 面積表示成另兩個正方形的面積和，即可推得勾股定理。

1. 首先證明三角形全等性質，推得其邊長相等關係，並假設其參數：

因為 $\angle IAL=\angle IAK, \angle ILA=\angle IKA=90^\circ, \overline{AI}=\overline{AI}$，所以 $\Delta IAL\cong\Delta IAK$ (AAS 全等)，推得

$$\overline{AL}=\overline{AK}, \overline{IL}=\overline{IK}.$$

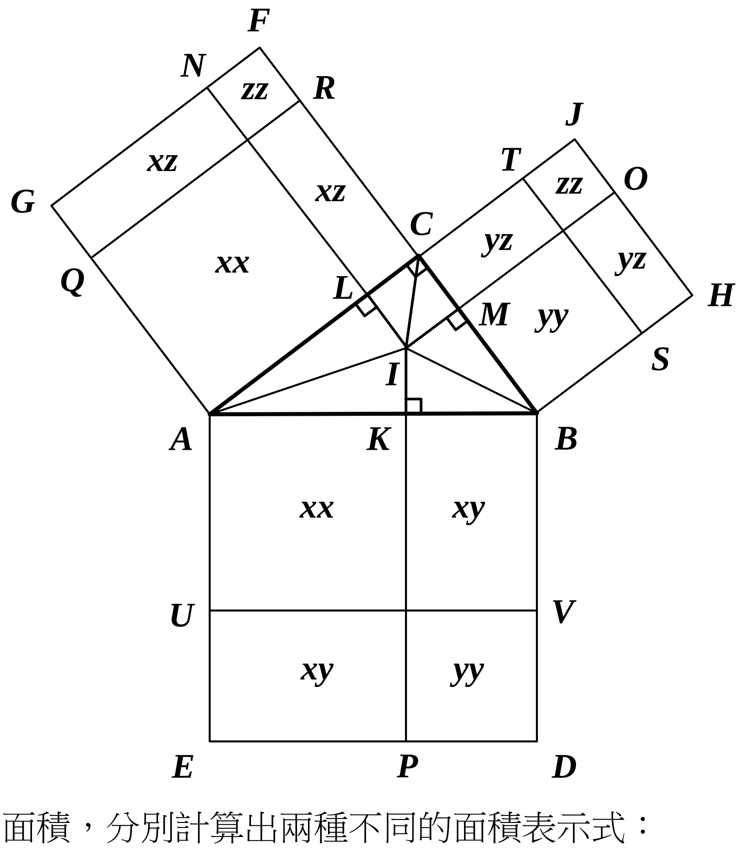
同理，亦可推得 $\Delta IBM\cong\Delta IBK$ (AAS 全等)，與 $\Delta ICL\cong\Delta ICM$ (AAS 全等)，因此

$$\overline{BM}=\overline{BK}, \overline{IM}=\overline{IK}, \overline{CL}=\overline{CM}, \overline{IM}=\overline{IL}.$$

由上述可知 $\overline{CL}=\overline{CM}, \overline{IM}=\overline{IL}$，又因為 $\angle ILC=\angle IMC=\angle ACB=90^\circ$，所以四邊形 $CLIM$ 為正方形，故可推得

$$\overline{CL}=\overline{CM}=\overline{IM}=\overline{IL}.$$

由上述可假設 $\overline{AL}=\overline{AK}=x$, $\overline{BM}=\overline{BK}=y$, $\overline{CL}=\overline{CM}=\overline{IM}=\overline{IL}=\overline{IK}=z$，且計算三個正方形各切割後的面積參數式，標示於圖上。



2. 由三角形 ABC 的面積，分別計算出兩種不同的面積表示式：

由圖可知：
$$\Delta ABC=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\left(x+z\right)\left(y+z\right)$$

整理成
$$2\Delta ABC=xy+xz+yz+z^2,$$

又因為
$$\begin{aligned}\Delta ABC&=\Delta IAL+\Delta IAK+\Delta IBM+\Delta IBK+\Delta ICL+\Delta ICM\\&=\frac{1}{2}xz+\frac{1}{2}xz+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z^2\\&=xz+yz+z^2\end{aligned}$$

整理成
$$2\Delta ABC=2xz+2yz+2z^2,$$

由面積的等價關係，對照上述兩等式，可得
$$xy=xz+yz+z^2.$$

3. 將正方形 $ABDE$ 面積參數式改寫成兩個較小的正方形面積和，再利用面積相等的關係，推出勾股定理：
由圖可知：
$$\square ABDE=x^2+y^2+2xy,$$
由第 2 點可知：$xy=xz+yz+z^2$，代入上式，整理成兩個正方形面積的表示式：
$$\begin{aligned}\square ABDE&=x^2+y^2+2\left(xz+yz+z^2\right)\\&=(x^2+z^2+2xz)+(y^2+z^2+2yz)\\&=\square ACFG+\square CBHJ,\end{aligned}$$
因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$，正方形 $CBHJ$ 邊長為 $\overline{BC}$，
所以可推得
$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$
即
$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】
1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis)在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是由攝影師 F. S. Smedley 在 1901 年 6 月 10 日想到的。之後在以下的書籍中也找到證明：Jury. Wipper(1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p.34). Leipz.: Friese.

2. 心得：此證明與 A101 證明觀念相近，只是此題是運用三角形的內心性質技巧性地切割三個正方形，巧妙運用了代數的想法來推算，此不同的角度可以讓學生感受到不同的思考面向。魯米斯將此證明歸類在代數-幾何證明裡。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		