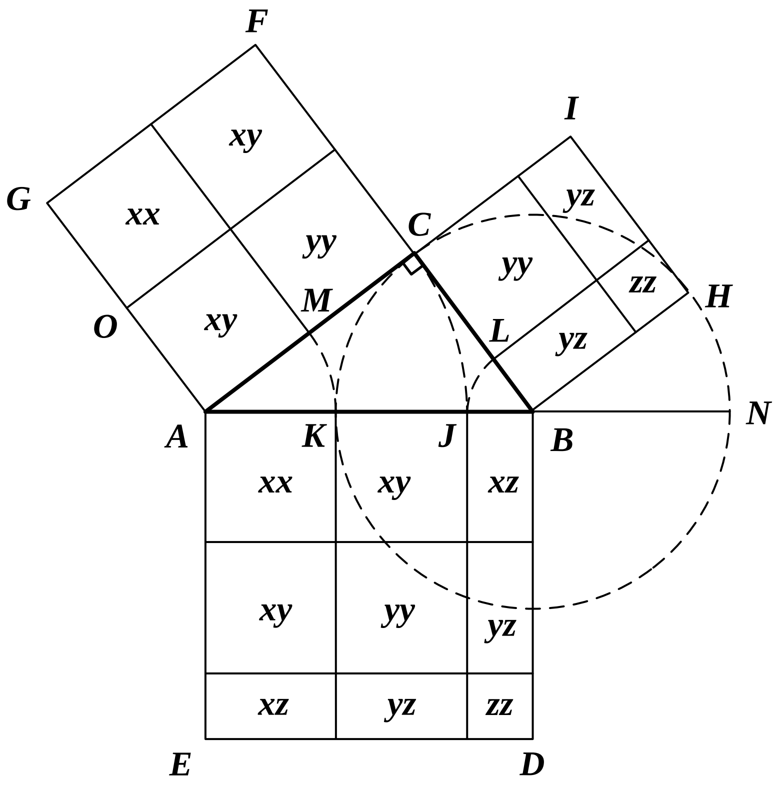
勾股定理證明-A101

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{AB}$為邊長，向外作一正方形$ABDE$；以$\overline{AC}$為邊長，向外作一正方形$ACFG$；以$\overline{BC}$為邊長，向外作一正方形$CBHI$。
2. 分別以A為圓心，$\overline{AC}$為半徑畫弧交$\overline{AB}$於J點。
3. 分別以B為圓心，$\overline{BC}$為半徑畫弧交$\overline{AB}$於K點，並且交$\overline{AB}$之延長線段於N點。
4. 再以A為圓心，$\overline{AK}$為半徑畫弧交$\overline{AC}$於M點，
5. 再以B為圓心，$\overline{BJ}$為半徑畫弧交$\overline{BC}$於L點。
6. 從M點作$\overline{AC}$的垂線，在$\overline{AG}$上取$\overline{GO}=\overline{AM}$，並從$O$點作$\overline{AC}$的平行線，使得正方形$ACFG$切割成如圖所示，如同上述作法，切割正方形$CBHI$、正方形$ABDE$。



【求證過程】

首先將三個正方形技巧性地切割，再分別求出每個正方形面積的表示式，另外由圓的乘冪性質得到邊長的關係式，透過代數上的運算，推得正方形$ABDE$面積表示成另兩個正方形的面積和，即可推得勾股定理。

1. 由半徑相等性質，假設等距的參數：

由圖中，假設 $\overline{AK}=x,\overline{CM}=y,\overline{BJ}=z$ ，因為 $\overline{AM}=\overline{AK}=x$ ，且 $\overline{AJ}=\overline{AC}$ ，所以

$$\overline{KJ}=\overline{AJ}-\overline{AK}=\overline{AC}-\overline{AM}=\overline{CM},$$

又因為 $\overline{BK}=\overline{BC}$ ，且 $\overline{BL}=\overline{BJ}=z$ ，所以

$$\overline{KJ}=\overline{BK}-\overline{BJ}=\overline{BC}-\overline{BL}=\overline{CL},$$

因此，

$$\overline{KJ}=\overline{CM}=\overline{CL}=y.$$

2. 將三個正方形技巧性地切割，再分別求出每個正方形面積的表示式：

由於正方形 $ABDE$ 中的 $\overline{AB}$ 邊長上依 $\overline{AK}=x$ 、 $\overline{KJ}=y$ 、 $\overline{JB}=z$ 等分，及 $\overline{AE}$ 依序以 $x,y,$z 等分作切割，如圖所示，使得

$$\square ABDE\text{面積}=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz\,.$$

同理，正方形 $ACFG$ 中的 $\overline{AC}$ 邊長上依 $\overline{AM}=x$ 、 $\overline{MC}=y$ 等分，及 $\overline{GA}$ 依序以 x,y 等分作切割，如圖所示，使得

$$\square ACFG\text{面積}=x^2+y^2+2xy.$$

正方形 $CBHI$ 中的 $\overline{BC}$ 邊長上依 $\overline{BL}=z$、$\overline{CL}=y$ 等分，及 $\overline{BH}$ 依序以 $y,$z 等分作切割，如圖所示，使得

$$\square CBHI\text{面積}=y^2+z^2+2yz\,.$$

3. 由圓的乘冪性質，可得到 $\overline{AC}$ 的幾何平均數：

以 B 為圓心， $\overline{BC}$ 為半徑的圓，由圓外一點 A 到圓的切線 $\overline{AC}$ 與割線 $\overline{AN}$ ，根據乘冪性質：

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2&=\overline{AK}\times\overline{AN}\\(x+y)^2&=[x+2(y+z)]\cdot x\\x^2+2xy+y^2&=x^2+2xy+2xz\\y^2&=2xz.\end{aligned}$$

4. 將正方形 $ABDE$ 面積參數式改寫成兩個較小的正方形面積和，利用面積相等的關係，推出勾股定理：

   由第 2 點可知：

$$\square ABDE\text{面積} = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz,$$

   將上述等式改寫成

$$\square ABDE\text{面積} = (x^2 + y^2 + 2xy) + (2xz + z^2 + 2yz),$$

   由第 3 點可知：$2xz = y^2$，代入上式，整理成兩個正方形面積的表示式：

$$\begin{aligned}\square ABDE\text{面積} &= (x^2 + y^2 + 2xy) + (y^2 + z^2 + 2yz) \\ &= \square ACFG\text{面積} + \square CBHI\ \text{面積},\end{aligned}$$

   因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$，正方形 $CBHI$ 邊長為 $\overline{BC}$，

   所以可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

   即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Arthur R. Colburn, LL.M. (1917). The Pons Asinorum II— New solution of the Pythagorean Theorem, *Scientific American Supplement*, *84*, 362.
2. 心得：此證明透過以兩股為半徑畫圓技巧性的作切割三個正方形，運用了面積計算的表示法，及圓的乘冪性質來間接推得三個正方形面積間的關係式，巧妙運用了代數的想法來思考。魯米斯將此證明歸類在代數-幾何證明。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		