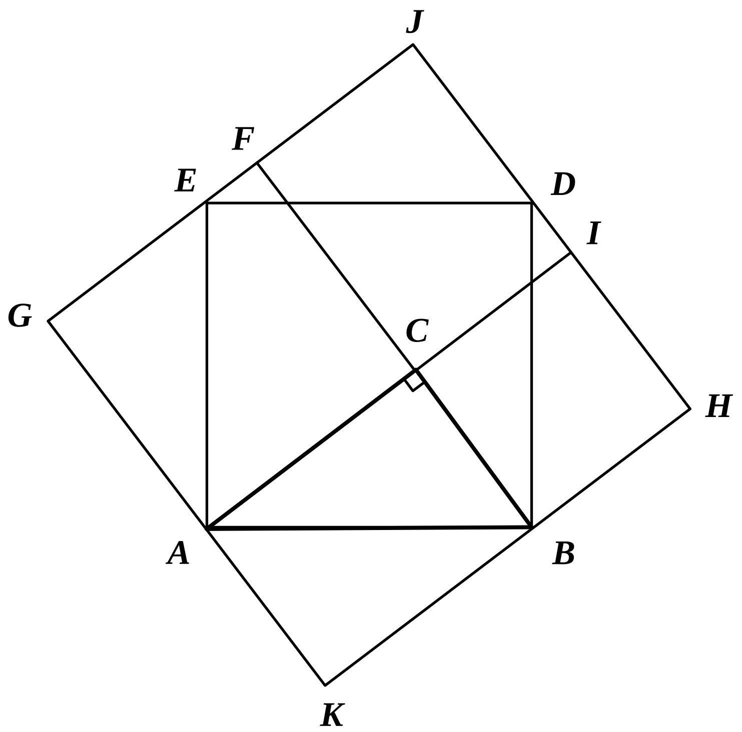
勾股定理證明-A100

【作輔助圖】

1. 分別以 $\overline{AB}$ 為邊長，向內作一正方形 $ABDE$；以 $\overline{AC}$ 為邊長，向外作一正方形 $ACFG$；

   以 $\overline{BC}$ 為邊長，向外作一正方形 $CBHI$。

2. 將 $\overline{GF}$ 及 $\overline{HI}$ 兩延長線交於 J 點，接著將 $\overline{GA}$ 及 $\overline{HB}$ 兩延長線交於 K 點。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，先證明圖中具有全等性質的四個直角三角形，依序排列在正方形 $ABDE$ 邊上，組合成正方形 $GKHJ$，最後利用正方形 $GKHJ$ 拆解來算面積，將等式整理，即可推得勾股定理的關係式。

1. 首先指出圖中哪些三角形具有全等性質：

   因為 $\overline{AG}=\overline{AC}, \overline{AE}=\overline{AB}$，且 $\angle GAE = 90° - \angle EAC = \angle CAB$，所以

   $$\Delta AEG \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

   因為 $\overline{EJ}//\overline{AC}, \overline{ED}//\overline{AB}$，所以 $\angle JED = \angle CAB$，又因為 $\overline{JD}//\overline{CB}, \overline{ED}//\overline{AB}$，所以

   $\angle EDJ = \angle ABC$，且 $\overline{ED}=\overline{AB}$，故可推得

$$\Delta EDJ \cong \Delta ABC\,(\text{ ASA 全等}),$$

因為 $\overline{BH}=\overline{BC},\overline{DB}=\overline{AB}$ ，且 $\angle DBH=90°-\angle CBD=\angle ABC$ ，所以

$$\Delta DBH \cong \Delta ABC\,(\text{ SAS 全等}),$$

因為 $\overline{KB}//\overline{AC},\overline{AK}//\overline{CB}$ ，所以 $\angle KBA=\angle CAB,\angle BAK=\angle ABC$ ，又 $\overline{AB}=\overline{AB}$ ，

故可推得

$$\Delta BAK \cong \Delta ABC\,(\text{ ASA 全等}),$$

因此，由上述可知

$$\Delta AEG \cong \Delta EDJ \cong \Delta DBH \cong \Delta BAK \cong \Delta ABC.$$

2. 說明圖中 $G-E-J$ 三點共線與 $J-D-H$ 三點共線：

由上述全等性質可知

$$\angle GEA+\angle AED+\angle JED=\angle CBA+90°+\angle CAB=180°,$$

故可推得

$$G-E-J\text{ 共線。}$$

同理

$$\angle EDJ+\angle EDB+\angle BDH=\angle ABC+90°+\angle BAC+=180°,$$

故可推得

$$J-D-H\text{ 共線。}$$

3. 說明四邊形 $GKHJ$ 為正方形：

由第 1 點結論可知 $\angle AGE=\angle EJD=\angle DHB=\angle BKJ=\angle ACB=90°$ ，

且 $\overline{GK}=\overline{GA}+\overline{AK}=\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{EJ}+\overline{GE}=\overline{GJ}$ ，

所以四邊形 $GKHJ$ 為正方形，其邊長為 $\overline{BC}+\overline{AC}$ 。

4. 最後正方形 $GKHJ$ 利用拆解的方式來算面積，將等式整理，即可推得勾股定理：

將正方形 $GKHJ$ 拆解成正方形 $ABDE$ 及四個全等於三角形 ABC 的直角三角形，即

$$\square GKHJ=\square ABDE+\Delta AEG+\Delta EDJ+\Delta DBH+\Delta BAK$$

$$\square GKHJ=\square ABDE+4\Delta ABC$$

$$\left(\overline{BC}+\overline{AC}\right)^2=\overline{AB}^2+4\left(\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{AC}\right)$$

$$\overline{BC}^2+2\overline{BC}\times\overline{AC}+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+2\overline{BC}\times\overline{AC}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

   Arthur R. Colburn, LL.M. (1910). The Pons Asinorum II— New solution of the Pythagorean Theorem, *Scientific American Supplement*, *70*, 382.

2. 心得：此證明別出心裁先畫出了三邊上正方形，透過延長線段再畫出一個大正方形，學生只要細心觀察，很快的可以看出正方形 *GKHJ* 邊上有四個全等的直角三角形，透過面積相等的代數運算就能推得出勾股定理。此證明在分類上，魯米斯指出透過面積的拼湊是屬於幾何部分，但在計算面積時，是屬於代數部分的。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		