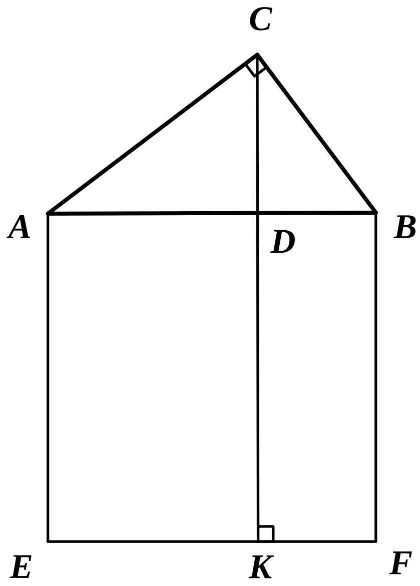
勾股定理證明-A097

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊長，向外作一正方形 $ABFE$ 。

2. 從 C 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AB}$ 於 D 點，交 $\overline{EF}$ 於 K 點。



【求證過程】

先證明圖中所有的三角形皆相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質推得兩股邊長的關係式，再利用正方形邊長相等關係將等式改寫成矩形面積，最後由正方形面積相等於兩矩形面積和，即可推得勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ACD 、三角形 CBD 與三角形 ABC 皆相似：
   因為 $\angle ADC = \angle ACB = 90°$ 且 $\angle DAC = \angle CAB$ ，可推得 $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (AA 相似)，
   同理， $\angle CDB = \angle ACB = 90°$ 且 $\angle CBD = \angle ABC$ ，可推得 $\Delta CBD \sim \Delta ABC$ (AA 相似)，
   所以
   $$\Delta CBD \sim \Delta ACD \sim \Delta ABC.$$
2. 利用上述三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 ABC 與三角形 CBD 相似可知： $\overline{BC} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{BC}$ ，整理得
   $$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \times \overline{BD}.$$
   由三角形 ABC 與三角形 ACD 相似可知： $\overline{AC} : \overline{AD} = \overline{AB} : \overline{AC}$ ，整理得
   $$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \times \overline{AD}.$$

3. 利用邊長相等關係，將兩股邊長的關係式改寫，再由面積相等的關係推出勾股定理的關係式：

因為 $\overline{AB}=\overline{BF}$ 及 $\overline{AB}=\overline{AE}$ ，所以

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}\times\overline{BD}=\overline{BF}\times\overline{BD}=\square DBFK,$$

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}\times\overline{AD}=\overline{AE}\times\overline{AD}=\square ADKE,$$

又因為由圖可知：

$$\square ABEF=\square DBFK+\square ADKE,$$

因此

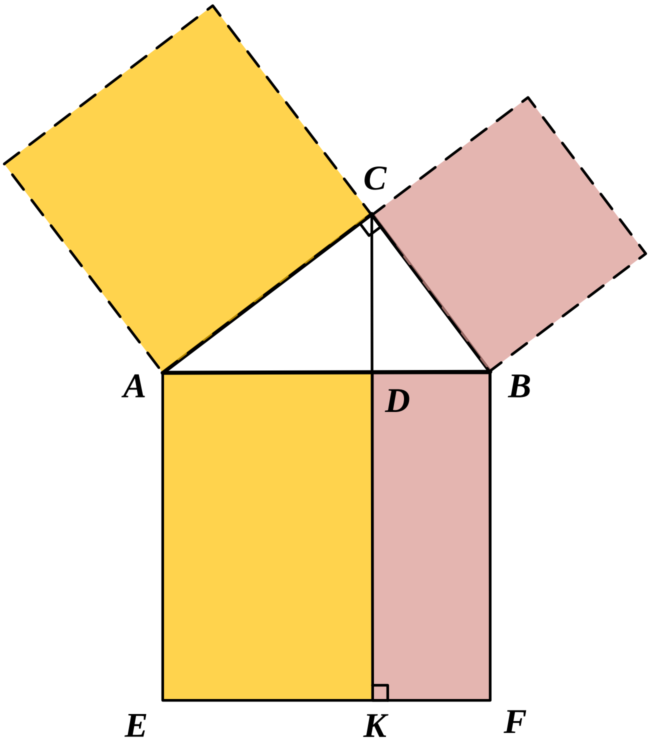
$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯在《勾股定理》這本書中寫道，這個證明是他在 1901 年 7 月 2 日想出來。
2. 心得：透過簡單在直角的點上作垂線，切出兩個直角三角形及兩個矩形，分別推得兩矩形面積等於對應的股邊長的平方，透過代數式也代表著矩形面積等於對應的股邊上的正方形，如以下輔助圖，明顯地說明兩股邊上的正方形面積和等於大正方形面積。



3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		