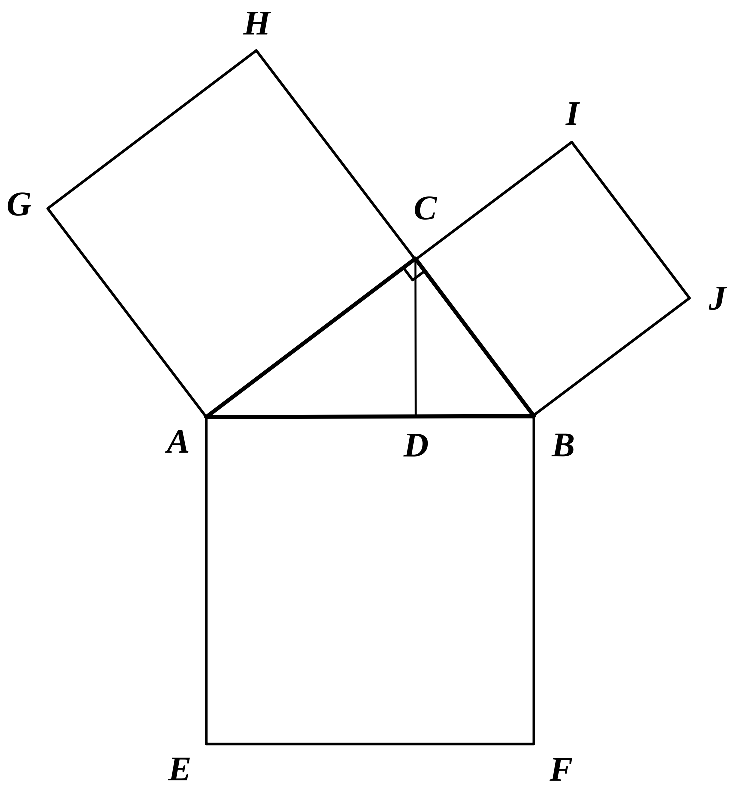
勾股定理證明-A096

【作輔助圖】

1. 從 C 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AB}$ 於 D 點。

2. 分別以 $\overline{AB}$ 為邊長，向外作一正方形 $ABFE$；以 $\overline{AC}$ 為邊長，向外作一正方形 $ACHG$；以 $\overline{BC}$ 為邊長，向外作一正方形 $CBJI$。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作三個正方形，先證明圖中所有的三角形皆相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質推得三角形面積比的關係，由三角形的面積比等於其對應的正方形面積比，最後由三角形面積相等而推得勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ACD、三角形 CBD 與三角形 ABC 皆相似：
   因為 $\angle ADC = \angle ACB = 90°$ 且 $\angle DAC = \angle CAB$，可推得 $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (AA 相似)，
   同理，$\angle CDB = \angle ACB = 90°$ 且 $\angle CBD = \angle ABC$，可推得 $\Delta CBD \sim \Delta ABC$ (AA 相似)，
   所以
   $$\Delta CBD \sim \Delta ACD \sim \Delta ABC.$$
2. 由三角形相似形對應邊成比例的性質推得其面積的比例關係：

   因為 $\Delta CBD \sim \Delta ACD \sim \Delta ABC$，且 $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ 分別為其直角三角形的斜邊，所以

其面積比等於對應邊長的平方比，即

$$\Delta CBD:\Delta ACD:\Delta ABC=\overline{BC}^2:\overline{AC}^2:\overline{AB}^2.$$

3. 由上述三角形的面積比等於其對應的正方形面積比，由三角形面積相等，而推得勾股定理的關係式：

因為$\Delta CBD:\Delta ACD:\Delta ABC=\overline{BC}^2:\overline{AC}^2:\overline{AB}^2=\square CBJI:\square ACHG:\square ABFE$，所以

$$(\Delta CBD+\Delta ACD):\Delta ABC=(\square CBJI+\square ACHG):\square ABFE,$$

由圖可知：$\Delta ACD+\Delta CBD=\Delta ABC$，所以

$$\square CBJI+\square ACHG=\square ABFE.$$

因此

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯在《勾股定理》這本書中寫道，這個證明是他在 1901 年 7 月 1 日想出來的。之後在以下的書籍中也找到證明：
   E. Fourrey (1934). *Curiosités Géométriques*(p. 91). Paris: Vuibert et Nony.
2. 心得：此證明簡單的運用相似形三角形面積比等於其對應的正方形面積比，藉由兩個小直角三角形面積和等於直角三角形 *ABC* 面積關係，透過比例式性質明顯地說明較小的兩個正方形面積和等於大正方形面積，是一題巧妙運用了比例的想法來思考，簡單明白。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		