勾股定理證明-A095

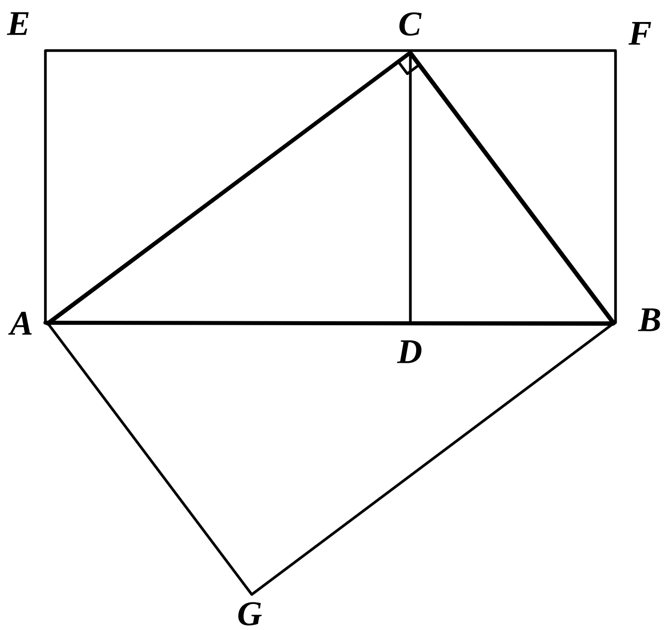
【作輔助圖】

1. 從 C 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AB}$ 於 D 點。

2. 過 C 點作 $\overline{AB}$ 的平行線，並從 A 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交平行線於 E 點。

3. 從 B 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交過 C 點的平行線於 F 點。

4. 從 A 點作 $\overline{BC}$ 的平行線，從 B 點作 $\overline{AC}$ 的平行線，兩平行線交於 G 點。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，先說明圖中哪些三角形具有全等及相似性質，利用相似形「對應邊成比例」的性質推得三角形面積比的關係，假設參數運用代數求得面積比，最後因面積相等而推得勾股定理的關係式。

1. 首先指出圖中哪些三角形具有全等性質：

   因為四邊形 $ADCE$ 為矩形，$\overline{AC}$ 為其對角線，故可推得 $\Delta CAE \cong \Delta ACD$ (ASA 全等).

   同理，因為四邊形 $BDCF$ 為矩形，$\overline{BC}$ 為其對角線，故可推得 $\Delta BCF \cong \Delta CBD$ (SSS 全等).

   因為 $ACBG$ 為矩形，$\overline{AB}$ 為其對角線，故可推得 $\Delta BAG \cong \Delta ABC$ (SSS 全等).

2. 接著證明三角形 ACD 、三角形 CBD 與三角形 ABC 皆相似：
因為 $\angle ADC = \angle ACB = 90°$ 且 $\angle DAC = \angle CAB$ ，可推得 $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (AA 相似)，
同理， $\angle CDB = \angle ACB = 90°$ 且 $\angle CBD = \angle ABC$ ，可推得 $\Delta CBD \sim \Delta ABC$ ，
所以

$$\Delta CBD \sim \Delta ACD \sim \Delta ABC.$$

3. 由三角形相似形對應邊成比例的性質推得其面積的比例關係：

因為 $\Delta CBD \sim \Delta ACD \sim \Delta ABC$ ，且 $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ 分別為其直角三角形的斜邊，所以

其面積比等於對應邊長的平方比，即

$$\Delta CBD : \Delta ACD : \Delta ABC = \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 = a^2 : b^2 : c^2.$$

由第 1 點可知 $\Delta BCF \cong \Delta CBD$ 、 $\Delta CAE \cong \Delta ACD$ 、 $\Delta BAG \cong \Delta ABC$ ，所以

$$\Delta BCF : \Delta CAE : \Delta BAG = a^2 : b^2 : c^2,$$

故可假設 $\Delta BCF = a^2 t, \Delta CAE = b^2 t, \Delta BAG = c^2 t$ ，其中 $t > 0$

4. 利用面積比例的關係及上述假設代入，推出勾股定理的關係式：
由

$$\Delta BAG : \left(\Delta BCF + \Delta CAE\right) = c^2 t : \left(a^2 t + b^2 t\right)$$

$$= c^2 : \left(a^2 + b^2\right),$$

又因為 $\Delta BCF + \Delta CAE = \Delta CBD + \Delta ACD = \Delta ABC = \Delta BAG$ ，所以

$$\Delta BAG : \left(\Delta BCF + \Delta CAE\right) = \Delta BAG : \Delta BAG = 1:1,$$

因此

$$\left(a^2 + b^2\right) : c^2 = 1:1$$

由比例式中內項乘積等於外項乘積，故得

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯在《勾股定理》這本書中寫道，這個證明是他在 1926 年 3 月 26 日想出來。
2. 心得：此證明與 A093、A094 的證明手法都是一樣的，甚至於是 A094 的改編版，透過建立另外的三個全等三角形作為比例項，若學生閱讀過 A093、A094 到這題的證明後，我想應該都會發覺到作者魯米斯編排的一些用意，這幾個證明之間雖然只是採用不同的三角形作為比例項，但都有等面積的性質。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		