勾股定理證明-A094

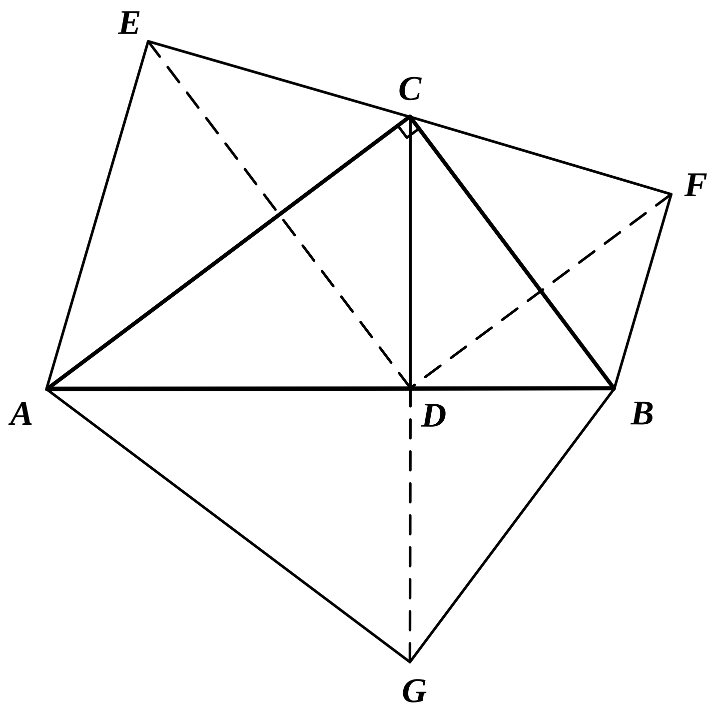
【作輔助圖】

1. 從C點作$\overline{AB}$的垂線，交$\overline{AB}$於D點。

2. 以$\overline{AC}$為對稱軸作D點的對稱點為E點，連接$\overline{EA}$、$\overline{EC}$。

3. 以$\overline{BC}$為對稱軸作D點的對稱點為F點，連接$\overline{FB}$、$\overline{FC}$。

4. 以$\overline{AB}$為對稱軸作D點的對稱點為G點，連接$\overline{GA}$、$\overline{GB}$。



【求證過程】

先指出圖中哪些三角形具有全等及相似性質，利用相似形「對應邊成比例」的性質推得三角形面積比的關係，假設參數運用代數求得面積比，最後由面積相等性質而推得勾股定理的關係式。

1. 首先指出圖中哪些三角形具有全等性質：

因為E點為D點的對稱點，使得$\overline{CE}=\overline{CD}, \overline{AE}=\overline{AD}$且$\overline{AC}=\overline{AC}$，可推得

$$\Delta ACE \cong \Delta ACD \text{ (SSS 全等).}$$

同理，因為F點為D點的對稱點，使得$\overline{CF}=\overline{CD}, \overline{BF}=\overline{BD}$且$\overline{BC}=\overline{BC}$，可推得

$$\Delta CBF \cong \Delta CBD \text{(SSS 全等)}.$$

2. 接著證明三角形 ACD、三角形 CBD 與三角形 ABC 皆相似：
   因為 $\angle ADC = \angle ACB = 90°$ 且 $\angle DAC = \angle CAB$，可推得 $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (AA 相似)，
   同理，$\angle CDB = \angle ACB = 90°$ 且 $\angle CBD = \angle ABC$，可推得 $\Delta CBD \sim \Delta ABC$，
   所以

$$\Delta CBD \sim \Delta ACD \sim \Delta ABC.$$

3. 由三角形相似形對應邊成比例的性質推得其面積的比例關係：

   因為 $\Delta CBD \sim \Delta ACD \sim \Delta ABC$，且 $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ 分別為其直角三角形的斜邊，所以其面積比等於對應邊長的平方比，即

$$\Delta CBD : \Delta ACD : \Delta ABC = \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 = a^2 : b^2 : c^2.$$

   故可假設 $\Delta CBD = a^2 t, \Delta ACD = b^2 t, \Delta ABC = c^2 t$，其中 $t > 0$

   由第 1 點可知 $\Delta CBF \cong \Delta CBD$、$\Delta ACE \cong \Delta ACD$，故亦可設 $\Delta CBF = a^2 t, \Delta ACE = b^2 t.$

4. 利用面積比例的關係及上述假設代入，推出勾股定理的關係式：
   由

$$\Delta ABC : (\Delta CBF + \Delta ACE) = c^2 t : (a^2 t + b^2 t)$$

$$= c^2 : (a^2 + b^2),$$

   又因為 $\Delta CBF + \Delta ACE = \Delta CBD + \Delta ACD = \Delta ABC$，所以

$$\Delta ABC : (\Delta CBF + \Delta ACE) = \Delta ABC : \Delta ABC = 1:1,$$

   因此 $$(a^2 + b^2) : c^2 = 1:1$$

   由比例式中內項乘積等於外項乘積，故得

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 84). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：

   (1) 此證明與 A093 的證明概念是一樣的，都是利用相似形「對應邊成比例」的性質推得面積比等於對應邊長的平方比，不同的是此題是建立另外的全等三角形作為與直角三角形 ABC 的比例項，而輔助圖中的三角形 ABG 在

證明中似乎沒有軋上一腳，顯然一開始是可以不用作此部分，

(2) 必須要指出的是，許多證明之間只是細節的不同，在閱讀過 A093 的證明後，我想應該都會在此證明有何須繞道走的感覺，然而如果用另一個角度試著猜想魯米斯將此題收錄在 A093 後，應該有他的用意在，也許是想說明一般化的情況，就是從三個邊不必規定只作正方形、作其他相似圖形也可以，經過這樣仔細推敲後，這或許是魯米斯呈現輔助圖的三角形 *ABG* 的用意。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		