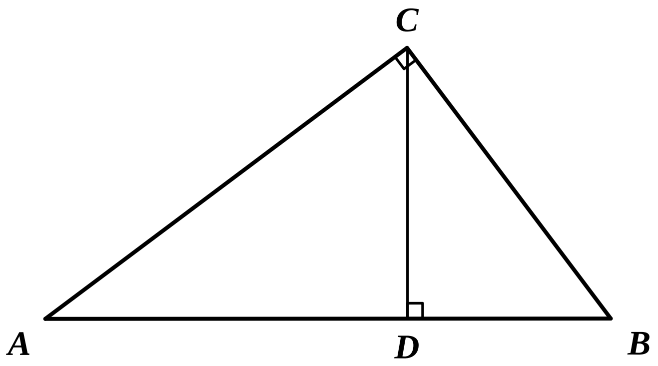
勾股定理證明-A093

【作輔助圖】

從 C 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AB}$ 於 D 點，如圖所示。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 內作輔助線，先說明圖中所有的三角形皆相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質推得三角形面積比的關係，假設參數運用代數求得面積比，最後由面積相等性質而推得勾股定理。

1. 首先證明三角形 ACD、三角形 CBD 與三角形 ABC 皆相似：
   因為 $\angle ADC = \angle ACB = 90°$ 且 $\angle DAC = \angle CAB$，可推得 $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (AA 相似)，
   同理，$\angle CDB = \angle ACB = 90°$ 且 $\angle CBD = \angle ABC$，可推得 $\Delta CBD \sim \Delta ABC$，
   所以
   $$\Delta CBD \sim \Delta ACD \sim \Delta ABC.$$
2. 由三角形相似形對應邊成比例的性質推得其面積的比例關係：
   因為 $\Delta CBD \sim \Delta ACD \sim \Delta ABC$，且 $\overline{BC}$，$\overline{AC}$，$\overline{AB}$ 分別為其直角三角形的斜邊，所以其面積比等於對應邊長的平方比，即
   $$\Delta CBD : \Delta ACD : \Delta ABC = \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 = a^2 : b^2 : c^2.$$
   故可假設 $\Delta CBD = a^2 t, \Delta ACD = b^2 t, \Delta ABC = c^2 t$，其中 $t > 0$
3. 利用面積比例的關係及上述假設代入，推出勾股定理的關係式：
   由於
   $$\left(\Delta CBD + \Delta ACD\right) : \Delta ABC = \left(a^2 t + b^2 t\right) : c^2 t$$
   $$= \left(a^2 + b^2\right) : c^2,$$

又因為 $\Delta ACD+\Delta CBD=\Delta ABC$ ，所以

$$\left(\Delta ACD+\Delta CBD\right):\Delta ABC=\Delta ABC:\Delta ABC=1:1,$$

因此 $$\left(a^2+b^2\right):c^2=1:1$$

由比例式中內項乘積等於外項乘積，故得

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   Versluys, J. (1768). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 82). Amsterdam: A. Versluys.
   J. M. Richardson (1859). Note on the forty-seventh proposition of euclid, *Mathematical Monthly,* 2(2), 45.
2. 心得：此證明與 A092 的證明概念是一樣的，都是利用相似形「對應邊成比例」的性質推得面積比等於對應邊長的平方比，但這題是直接利用面積相等比值為 1 的關係直接求得勾股定理，相當簡單明白，是一題由面積比例的觀念作為入門閱讀的題型。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	