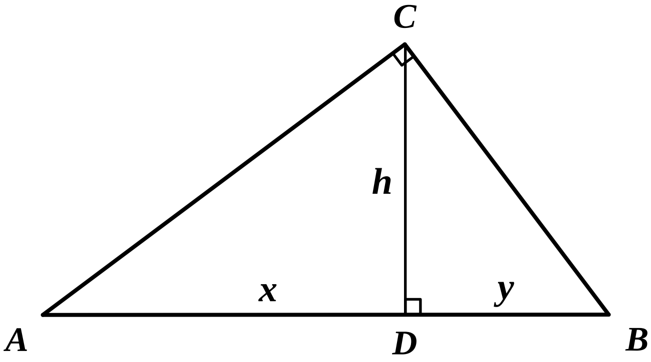
勾股定理證明-A092

【作輔助圖】

從 C 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AB}$ 於 D 點，如圖所示。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 內作輔助線，先說明圖中所有的三角形皆相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質推得面積比例關係，最後對照兩種面積比的表現式，即可推出勾股定理關係式。

1. 首先證明三角形 ACD 、三角形 CBD 與三角形 ABC 皆相似：
   因為 $\angle ADC = \angle ACB = 90°$ 且 $\angle DAC = \angle CAB$ ，可推得 $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (AA 相似)，
   同理， $\angle CDB = \angle ACB = 90°$ 且 $\angle CBD = \angle ABC$ ，可推得 $\Delta CBD \sim \Delta ABC$ ，所以
   $$\Delta CBD \sim \Delta ACD \sim \Delta ABC.$$
2. 由三角形相似利用對應邊成比例的性質推得其面積的比例關係：

   因為 $\Delta CBD \sim \Delta ACD \sim \Delta ABC$ ，且 $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ 分別為其直角三角形的斜邊，所以

   其面積比等於對應邊長的平方比，即

   $$\Delta CBD : \Delta ACD : \Delta ABC = \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 = a^2 : b^2 : c^2.$$

   故可假設 $\Delta CBD = a^2t, \Delta ACD = b^2t, \Delta ABC = c^2t$ ，其中 $t > 0$

3. 利用面積比例的關係及上述假設代入，推出勾股定理的關係式：
   由於
   $$\Delta ABC : \Delta CBD = \frac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{CD} : \frac{1}{2}\overline{BC} \times \overline{CD},$$

   令 $\overline{AD} = x, \overline{BD} = y, \overline{CD} = h$ ，代入上式

$$\Delta ABC : \Delta CBD = \frac{1}{2}(x+y)h : \frac{1}{2}yh$$

$$= \left(\frac{1}{2}xh + \frac{1}{2}yh\right) : \frac{1}{2}yh$$

$$= \left(b^2 t + a^2 t\right) : a^2 t$$

$$= \left(a^2 + b^2\right) : a^2,$$

又因為

$$\Delta ABC : \Delta CBD = c^2 : a^2,$$

所以

$$c^2 : a^2 = \left(a^2 + b^2\right) : a^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自以下書籍：
   Jury. Wipper(1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p.38). Leipz.: Friese.
   E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p. 91). Paris: Vuibert et Nony.
2. 心得：此證明利用了相似形「對應邊成比例」的性質推得面積比等於對應邊長的平方比，以及計算三角形面積運用參數式求得面積比，比較兩種面積比的表現式而推得勾股定理。以對照的關係間接求得，可以讓學生感受到不同以往的思考面向。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	