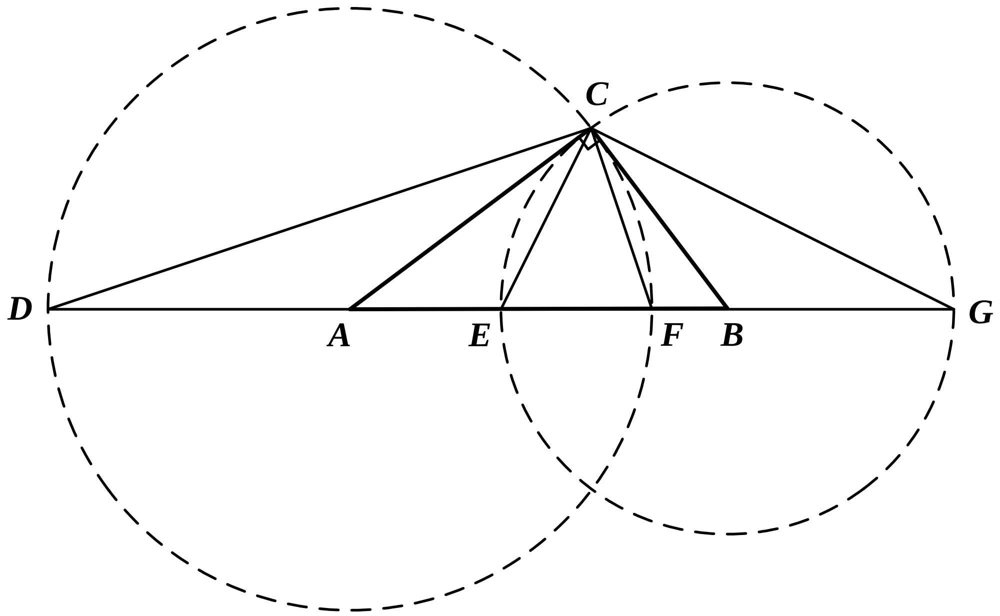
勾股定理證明-A091

【作輔助圖】

1. 分別以 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 為半徑畫圓。

2. 將 $\overline{AB}$ 延長，分別交圓 A 於 D 、 F 點、交圓 B 於 E 、 G 點。

3. 連接 $\overline{CD}$ 、 $\overline{CE}$ 、 $\overline{CF}$ 、 $\overline{CG}$ 。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 兩股為半徑畫圓作輔助線後，先證明圖中的三角形相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質推得「合比定理與分比定理」，代數運算過程利用代換及整理，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ACE 與三角形 AGC 相似，推得邊長比例關係：

   因為 $\angle CAE = \angle GAC$ 且 $\angle ACE = \frac{1}{2}CE = \angle AGC$ ，可推得 $\Delta ACE \sim \Delta AGC$ (AA 相似)，

   故可知： $\overline{AC}:\overline{AE} = \overline{AG}:\overline{AC}$ ，又因為半徑相等，即

$$\overline{AD}:\overline{AE} = \overline{AG}:\overline{AF}.$$

2. 由上述比例式分別推得合比定理與分比定理的關係式：

由合比定理(於註與心得：第 4 點補充證明)可知：

$$\left(\overline{AD}+\overline{AE}\right):\left(\overline{AG}+\overline{AF}\right)=\overline{AE}:\overline{AF}$$

$$\left(\overline{AD}+\overline{AE}\right):\left(\overline{AG}+\overline{AD}\right)=\overline{AE}:\overline{AF}$$

$$\overline{DE}:\overline{DG}=\overline{AE}:\overline{AF},$$

由分比定理(於註與心得：第 4 點補充證明)可知：

$$\left(\overline{AD}-\overline{AE}\right):\left(\overline{AG}-\overline{AF}\right)=\overline{AE}:\overline{AF}$$

$$\left(\overline{AF}-\overline{AE}\right):\left(\overline{AG}-\overline{AF}\right)=\overline{AE}:\overline{AF}$$

$$\overline{EF}:\overline{FG}=\overline{AE}:\overline{AF}$$

由上述兩等式可知：

$$\overline{DE}:\overline{DG}=\overline{EF}:\overline{FG}$$

3. 將上述比例式的邊長代換成三角形 ABC 的邊長表示，依推出勾股定理的相關式：

已知 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$ ，又因為半徑相等，即

$$\overline{DE}:\overline{DG}=\overline{EF}:\overline{FG}$$

$$\left(\overline{AD}+\overline{AE}\right):\left(\overline{AD}+\overline{AB}+\overline{BG}\right)=\left(\overline{BE}+\overline{AF}-\overline{AB}\right):\left(\overline{BG}+\overline{BF}\right)$$

$$\left(\overline{AD}+\overline{AB}-\overline{BE}\right):\left(\overline{AD}+\overline{AB}+\overline{BG}\right)=\left(\overline{BE}+\overline{AF}-\overline{AB}\right):\left(\overline{BG}+\overline{AB}-\overline{AF}\right)$$

$$(b+c-a):(b+c+a)=(a+b-c):(a+c-b)\ ,$$

由內項乘積等於外項乘積，進行整理：

$$(b+c+a)\times(a+b-c)=(b+c-a)\times(a+c-b)$$

$$(a+b+c)\times(a+b-c)=\left[c-(a-b)\right]\times\left[c+(a-b)\right]$$

$$(a+b)^2-c^2=c^2-(a-b)^2$$

$$2c^2=(a+b)^2+(a-b)^2$$

$$2c^2=2a^2+2b^2$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍與期刊：
   Olney, Edward (1877). *A treatise on special or elementary geometry* (p.312). New York: Sheldon.
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 5(4), 12.
2. 心得：此證明與 A089、A090 的輔助圖一樣，但此證明 A091 是運用比例式的性質求證勾股定理。證明也僅由一組比例式開始，就可以推演出來，建議學生可以試著由另一組相似形對應邊成比例作為練習，也許透過動手作可以更掌握其中的技巧精神。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：

■合比定理：已知：若 $a:b=c:d$，求證：$(a+b):(c+d)=b:d$.

已知 $a:b=c:d$

由內項乘積等於外項乘積，得 $ad=bc$

等式的兩邊同加 bd，兩邊仍相等 $ad+bd=bc+bd$

提出公因數 $(a+b)d=b(c+d)$

等式的兩邊同除 bd，兩邊仍相等 $\dfrac{(a+b)d}{bd}=\dfrac{b(c+d)}{bd}$

$$\frac{(a+b)}{b}=\frac{(c+d)}{d}$$

$$(a+b):(c+d)=b:d\ .$$

■分比定理：已知：若 $a:b=c:d$，求證：$(a-b):(c-d)=b:d$.

已知 $a:b=c:d$

由內項乘積等於外項乘積，得 $ad=bc$

等式的兩邊同減 bd，兩邊仍相等 $ad-bd=bc-bd$

提出公因數 $(a-b)d=b(c-d)$

等式的兩邊同除bd，兩邊仍相等

$$\frac{(a-b)d}{bd}=\frac{(c-d)b}{bd}$$

$$\frac{(a-b)}{b}=\frac{(c-d)}{d}$$

$$(a-b):(c-d)=b:d\ .$$

■ 合分比定理：已知：若 $a:b=c:d$，求證：$(a-b):(c-d)=b:d$.