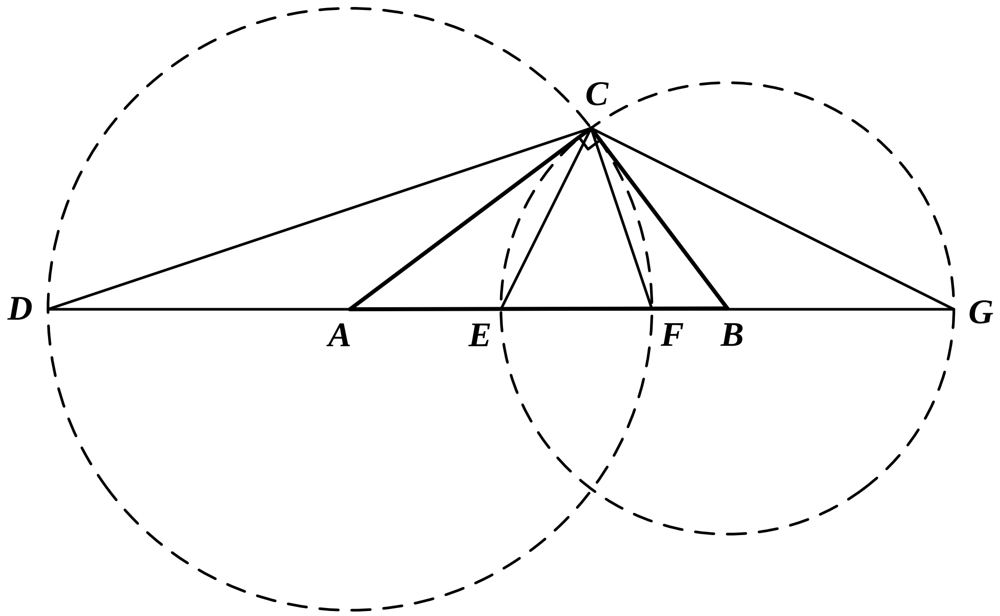
勾股定理證明-A090

【作輔助圖】

1. 分別以 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 為半徑畫圓。

2. 將 $\overline{AB}$ 延長，分別交圓 A 於 D 、 F 點、交圓 B 於 E 、 G 點。

3. 連接 $\overline{CD}$ 、 $\overline{CE}$ 、 $\overline{CF}$ 、 $\overline{CG}$ 。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 兩股為半徑畫圓作輔助線後，先證明圖中的三角形相似，利用「圓的外冪性質」推得兩股邊長平方的等式，再將等式相加，代數運算過程利用代換及化簡，即可推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 BCF 與三角形 BDC 相似，推得邊長關係：

   因為 $\angle CBF = \angle DBC$ 且 $\angle BCF = \frac{1}{2}CF = \angle BDC$ ，可推得 $\Delta BCF \sim \Delta BDC$ (AA 相似)，

   故可知： $\overline{BC} : \overline{BF} = \overline{BD} : \overline{BC}$ ，整理得

$$\overline{BC}^2 = \overline{BF} \times \overline{BD}.$$

   由上述 $\overline{BC}$ 為 $\overline{BD}$ 和 $\overline{BF}$ 的幾何平均數，可知滿足「圓的外冪性質」。

2. 接著證明三角形 ACE 與三角形 AGC 相似，推得邊長關係：

因為 $\angle CAE=\angle GAC$ 且 $\angle ACE=\frac{1}{2}CE=\angle AGC$ ，可推得 $\Delta ACE\sim\Delta AGC$ (AA 相似)，

故可知： $\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{AG}:\overline{AC}$ ，整理得

$$\overline{AC}^2=\overline{AE}\times\overline{AG}.$$

由上述 $\overline{AC}$ 為 $\overline{AE}$ 和 $\overline{AG}$ 的幾何平均數，可知滿足「圓的外冪性質」。

3. 將上述兩等式相加並利用半徑相等的代換，推出畢氏定理的關係式：

由第 1、2 點可知：

$$\overline{BC}^2=\overline{BF}\times\overline{BD}=\overline{BF}\times\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right),$$

$$\overline{AC}^2=\overline{AE}\times\overline{AG}=\overline{AE}\times\left(\overline{AB}+\overline{BC}\right),$$

將上述兩等式相加：

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2+\overline{AC}^2&=\overline{BF}\times\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)+\overline{AE}\times\left(\overline{AB}+\overline{BC}\right)\\&=\overline{BF}\times\overline{AB}+\overline{BF}\times\overline{AC}+\overline{AE}\times\overline{AB}+\overline{AE}\times\overline{BC}\\&=\overline{AB}\times\left(\overline{BF}+\overline{AE}\right)+\overline{AE}\times\overline{BC}+\left(\overline{BF}\times\overline{AC}+\overline{BF}\times\overline{AB}\right)-\overline{BF}\times\overline{AB}\\&=\overline{AB}\times\left(\overline{BF}+\overline{AE}\right)+\overline{AE}\times\overline{BC}+\overline{BF}\times\left(\overline{AC}+\overline{AB}\right)-\overline{BF}\times\overline{AB}\end{aligned}$$

將其中 $\overline{BF}\times\left(\overline{AC}+\overline{AB}\right)=\overline{BC}^2$ 代換：

$$\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}\times\left(\overline{BF}+\overline{AE}\right)+\overline{AE}\times\overline{BC}+\overline{BC}^2-\overline{BF}\times\overline{AB}$$

將其中 $\overline{BC}=\overline{BE}$ ， $\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{BE}$ 代換：

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2+\overline{AC}^2&=\overline{AB}\times\left(\overline{BF}+\overline{AE}\right)+\overline{AE}\times\overline{BE}+\overline{BE}^2-\left(\overline{AE}+\overline{BE}\right)\times\overline{BF}\\&=\overline{AB}\times\left(\overline{BF}+\overline{AE}\right)+\overline{AE}\times\overline{BE}+\overline{BE}^2-\overline{BE}\times\overline{BF}-\overline{AE}\times\overline{BF}\\&=\overline{AB}\times\left(\overline{BF}+\overline{AE}\right)+\overline{AE}\times\left(\overline{BE}-\overline{BF}\right)+\overline{BE}\times\left(\overline{BE}-\overline{BF}\right)\\&=\overline{AB}\times\left(\overline{BF}+\overline{AE}\right)+\left(\overline{AE}+\overline{BE}\right)\times\left(\overline{BE}-\overline{BF}\right)\\&=\overline{AB}\times\left(\overline{BF}+\overline{AE}\right)+\overline{AB}\times\overline{EF}\\&=\overline{AB}\times\left(\overline{BF}+\overline{AE}+\overline{EF}\right)\end{aligned}$$

因此

$$\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}\times\overline{AB}=\overline{AB}^2$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明是勒讓德(A. M. Legendre, 1752-1833)在 19 世紀早期曾證明過，收錄於以下的期刊：
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 5(4), 12.
   J. M. Richardson (1859). Note on the forty-seventh proposition of euclid, *Mathematical Monthly,* 2(2), 45.
2. 心得：
   (1) 此證明是魯米斯在《勾股定理》這本書中認為是所有勾股定理證明最長的證明，由於太長以致無法將全文呈現出來，以上證明會略加修改，使得證明更容易理解。
   (2) 此證明是利用「圓的外冪性質」推得兩股邊長的關係式，將兩式相加，整理過程中利用代換不斷朝著能化簡成斜邊長進行，步驟雖繁雜，但試著弄懂這般長的證明,也可當測試一個人耐心的極限。建議可先參照 A089 才接著閱讀此證明，可以發現許多證明之間只是細節的不同，而開始有了不同的路徑，想想或許每個人的追夢人生也是如此，但只要朝著對的大方向進行，最終我們到達的目的地都會是一樣的。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	