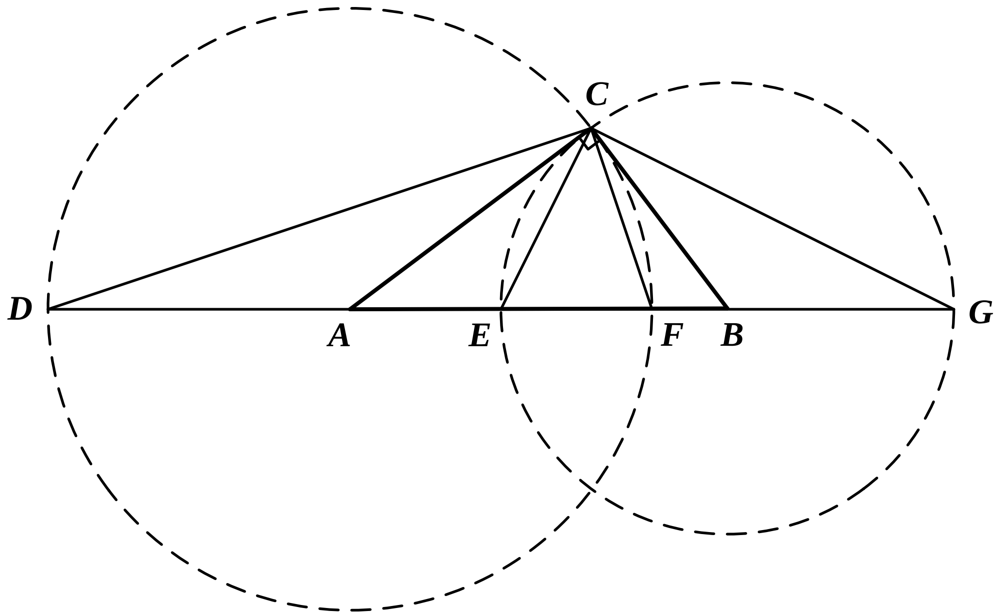
勾股定理證明-A089

【作輔助圖】

1. 分別以 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 為半徑畫圓。

2. 將 $\overline{AB}$ 延長，分別交圓 A 於 D 、 F 點、交圓 B 於 E 、 G 點。

3. 連接 $\overline{CD}$ 、 $\overline{CE}$ 、 $\overline{CF}$ 、 $\overline{CG}$ 。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 兩股為半徑畫圓作輔助線後，先證明圖中的相似三角形，利用的「對應邊成比例」性質推得兩股邊長的等式，將兩股平方和相加並整理，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 BCF 與三角形 BDC 相似，推得邊長關係：

   因為 $\angle CBF = \angle DBC$ 且 $\angle BCF = \frac{1}{2}CF = \angle BDC$ ，可推得 $\Delta BCF \sim \Delta BDC$ (AA 相似)，

   故可知： $\overline{BC}:\overline{BF} = \overline{BD}:\overline{BC}$ ，整理得

   $$\overline{BC}^2 = \overline{BD} \times \overline{BF}.$$

   由上述 $\overline{BC}$ 為 $\overline{BD}$ 和 $\overline{BF}$ 的比例中項，可知滿足「圓的外冪性質」。

2. 接著證明三角形 ACE 與三角形 AGC 相似，推得邊長關係：

因為 $\angle CAE = \angle GAC$ 且 $\angle ACE = \frac{1}{2}CE = \angle AGC$ ，可推得 $\Delta ACE \sim \Delta AGC$ (AA 相似)，

故可知： $\overline{AC}:\overline{AE} = \overline{AG}:\overline{AC}$ ，整理得

$$\overline{AC}^2 = \overline{AG} \times \overline{AE}.$$

由上述 $\overline{AC}$ 為 $\overline{AE}$ 和 $\overline{AG}$ 的比例中項，可知滿足「圓的外冪性質」。

3. 將上述兩等式相加整理，推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 &= \overline{BD} \times \overline{BF} + \overline{AG} \times \overline{AE} \\ &= \left(\overline{AB} + \overline{AD}\right)\left(\overline{AB} - \overline{AF}\right) + \left(\overline{AB} + \overline{BG}\right)\left(\overline{AB} - \overline{BE}\right) \\ &= \left(\overline{AB} + \overline{AC}\right)\left(\overline{AB} - \overline{AC}\right) + \left(\overline{AB} + \overline{BC}\right)\left(\overline{AB} - \overline{BC}\right) \\ &= \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2\end{aligned}$$

整理成

$$2\overline{BC}^2 + 2\overline{AC}^2 = 2\overline{A}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 5(4), 12.

   J. M. Richardson (1859). Note on the forty-seventh proposition of euclid, *Mathematical Monthly,* 2(2), 45.

   根據備註寫道期刊證明要比此證明 A089 更困難些。

2. 心得：此證明是利用三角形相似推得兩股邊長的等式，滿足圓的外冪性質，再利用半徑相等的代數方法，即可推得。此證明與 A088 相似，基於輔助圖直接利用「圓的外冪性質」角度來論證，似乎更合適搭配此證明的輔助圖。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	