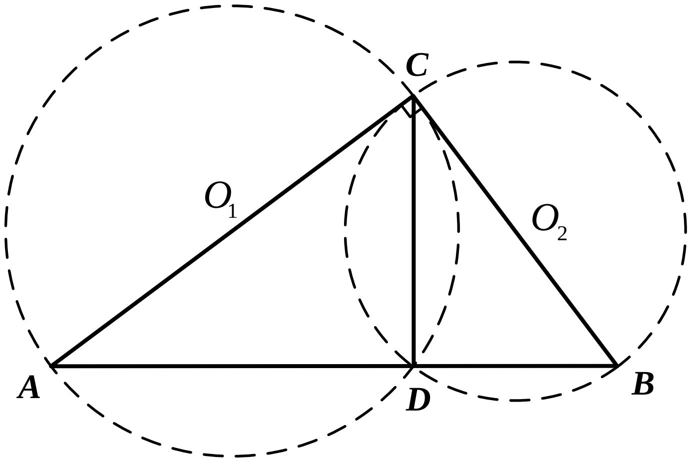
勾股定理證明-A088

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AC}$ 為直徑畫圓，且交 $\overline{AB}$ 於 D 點；接著以 $\overline{BC}$ 為直徑畫圓。

2. 連接 $\overline{CD}$。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 兩股為直徑畫圓，連接交點後使得裡面形成兩個直角三角形，先說明圖中所有的三角形皆相似，再利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先說明 $\overline{CD}$ 垂直於 $\overline{AB}$，使得三角形 ACD 與三角形 CBD 分別為圓內接直角三角形：

   因為 $\overline{AC}$ 為直徑，所以 $\angle ADC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\times 180° = 90°$，即 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$。

   (於註與心得：第 4 點補充，提供另一種證明。)

   因為 $\angle CDB = 90°$，故以 $\overline{BC}$ 為直徑畫圓，則必過 D 點，故三角形 CBD 為圓 O_2 內接直角三角形。

2. 證明三角形 ACD、三角形 CBD 與三角形 ABC 皆相似：

   因為 $\angle ADC = \angle ACB = 90°$ 且 $\angle DAC = \angle CAB$，可推得 $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (AA 相似)，
   同理，$\angle CDB = \angle ACB = 90°$ 且 $\angle CBD = \angle ABC$，可推得 $\Delta CBD \sim \Delta ABC$ (AA 相似)，
   所以

   $$\Delta ACD \sim \Delta CBD \sim \Delta ABC.$$

3. 由第 2 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 ACD 與三角形 ABC 相似可知：$\overline{AC}:\overline{AD}=\overline{AB}:\overline{AC}$，整理得

$$\overline{AC}^2=\overline{AD}\times\overline{AB}.$$

由三角形 CBD 與三角形 ABC 相似可知：$\overline{BC}:\overline{BD}=\overline{AB}:\overline{BC}$，整理得

$$\overline{BC}^2=\overline{BD}\times\overline{AB}.$$

4. 將上述兩等式相加整理，推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2+\overline{AC}^2&=\overline{AB}\times\overline{BD}+\overline{AB}\times\overline{AD}\\&=\overline{AB}\times\left(\overline{BD}+\overline{AD}\right)\\&=\overline{AB}\times\overline{AB}\\&=\overline{AB}^2,\end{aligned}$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

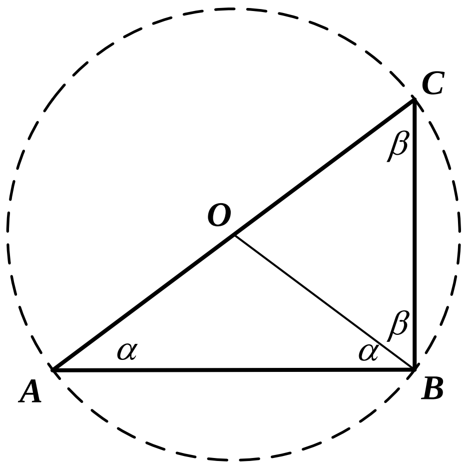
【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   Edwards, George C. (1895). *Elements of Geometry* (p.161). New York : Macmillan and co.
   亦出自於以下期刊：
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 5(4), 11.
   J. M. Richardson (1859). Note on the forty-seventh proposition of euclid, *Mathematical Monthly*, 2(2), 45.
2. 心得：此證明與 A001 最簡短的證明概念是一樣的，差別在 A001 是從 C 點作垂線，而此證明 A088 是以兩股邊長為直徑畫圓然後連接交點，兩者作輔助圖完後，皆使得直角三角形 ABC 內形成兩個直角三角形。但根據備註寫道另一種證明 (於第 4 點補充)，基於此證明的輔助圖，利用「圓的外冪性質」，似乎更合適搭配此證明的輔助圖。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：
   ■ 圓形中，直徑所對的圓周角必是直角：

因為 $\overline{AC}$ 為為直徑，則連接圓心 O 點到 B 點也是半徑，形成了兩個等腰三角形，



因此 $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$

$\angle OCB = \angle OBC = \beta$

又因為

$\angle OAB + \angle OBA + \angle OBC + \angle OCB = 2\alpha + 2\beta = 180°$

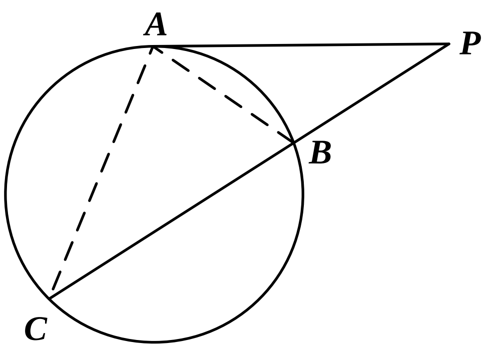
所以

$\angle ABC = \alpha + \beta = 90°.$

■ 圓的外冪性質：

令 $\overline{AP}$ 為圓的一切線，A 為切點。$\overline{BC}$ 為圓的一條弦，$\overline{BC}$ 的延長線交 $\overline{AP}$ 於 P，則

$$\overline{AP}^2 = \overline{PB} \times \overline{PC}.$$



(1) 連接 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$

(2) 因為 $\angle PAB = \angle ACB$ (對應到同弧故等角)

$\angle APB = \angle APC$ (對應到同弧的圓周角相等)

所以 $\Delta APB \sim \Delta CPA$ (AA相似).

(3) 可知相似三角形對應邊成比例，所以

$\overline{PA} : \overline{PB} = \overline{PC} : \overline{PA}$

整理得

$\overline{AP}^2 = \overline{PB} \times \overline{PC}$.

■ 根據此證明備註寫道，提供以下另一種證明：

(1) 因為 $\angle ACB = 90°$，$\overline{BC}$ 為圓 O_1 的一切線，$\overline{AB}$ 為圓 O_1 的一條弦，則

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD} \times \overline{AB}.$$

同理，因為 $\angle ACB = 90°$，$\overline{AC}$ 為圓 O_2 的一切線，$\overline{AB}$ 為圓 O_2 的一條弦，則

$$\overline{AC}^2=\overline{AD}\times\overline{AB}.$$

(2) 將上述兩等式相加整理

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2+\overline{AC}^2&=\overline{AB}\times\overline{BD}+\overline{AB}\times\overline{AD}\\&=\overline{AB}\times\left(\overline{BD}+\overline{AD}\right)\\&=\overline{AB}\times\overline{AB}\\&=\overline{AB}^2.\end{aligned}$$

即推得勾股定理的關係式。