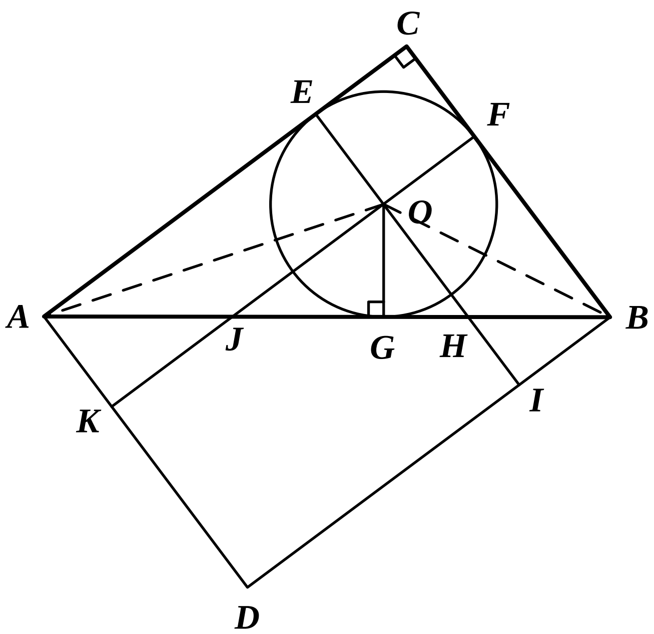
勾股定理證明-A087

【作輔助圖】

1. 分別從 A 點作 $\overline{CB}$ 的平行線，從 B 點作 $\overline{CA}$ 的平行線，且兩平行線交於 D 點。
2. 分別作角 A 與角 B 的角平分線，且兩角平分線之交點為 O，即為三角形 ABC 之內心。
3. 從 O 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AB}$ 於 G 點，並以 $\overline{OG}$ 為半徑畫圓，分別交 $\overline{AC}$ 於 E 點，交 $\overline{BC}$ 於 F 點。
4. 連接 $\overline{OE}$ 且延長，分別交 $\overline{AB}$ 於 H 點，交 $\overline{BD}$ 於 I 點。
5. 連接 $\overline{OF}$ 且延長，分別交 $\overline{AB}$ 於 J 點，交 $\overline{AD}$ 於 K 點。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 內作內切圓，由內心的性質推得圓外一點對圓作切線的兩切線段等長，將大矩形 $ADBC$ 拆成面積相等的兩部分，利用面積相等及代數運算，推得勾股定理的關係式：

1. 首先利用內心的性質，推得圓外一點對圓作切線的兩切線段等長：
   因為圓 O 是直角三角形 ABC 的內切圓，且 E,F,G 為切點，則在三角形 AOE 與三角形 AOG 中，因為 $\angle AEO=\angle AGO=90°,\ \overline{OE}=\overline{OG},\ \overline{AO}=\overline{AO}$，所以

$$\Delta AOE\cong\Delta AOG\ (\text{RHS 全等}),$$

推得 $\overline{AE}=\overline{AG}$，同理，可推得 $\overline{BF}=\overline{BG}$, $\overline{CE}=\overline{CF}$，即圓外一點對圓做切線的兩切線段等長。

2. 說明四邊形 $ADBC$ 、 $AKOE$ 、 $OIBF$ 為矩形，四邊形 $CEOF$ 為正方形，並且將直角三角形 ABC 三邊長用切線段長表示：

因為 $\overline{AD}//\overline{CB}, \overline{BD}//\overline{CA}$，且 $\angle ACB=90^\circ$，由平行線性質推得四邊形 $ADBC$ 為矩形，四邊形 $AKOE$ 與四邊形 $OIBF$ 皆為矩形。

因為 $\angle FCE=\angle OEC=\angle OFC=90^\circ, \overline{OE}=\overline{OF}$，所以四邊形 $CEOF$ 為正方形，故

$$\overline{CE}=\overline{CF}=\overline{OE}.$$

已知 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$，以及 $\overline{AE}=\overline{AG}=p,\ \overline{BF}=\overline{BG}=q,\ \overline{CE}=\overline{CF}=r,$

可得

$$a=q+r, b=p+r, c=p+q.$$

3. 證明三角形 ABD 面積與矩形 $OKDI$ 面積相等：

因為 $\angle AJK=\angle OJG, \angle AKJ=\angle OGJ=90^\circ$ 且 $\overline{AK}=\overline{OE}=\overline{OG}$，所以

$$\Delta AJK \cong \Delta OJG \text{(AAS 全等)},$$

因為 $\angle BHI=\angle OHG, \angle BIH=\angle OGH=90^\circ$ 且 $\overline{BI}=\overline{OF}=\overline{OG}$ 所以

$$\Delta BHI \cong \Delta OHG \text{(AAS 全等)},$$

所以可推得

$$\Delta ABD\text{面積}=\text{矩形}OKDI\text{面積}.$$

4. 最後矩形 $ADBC$ 拆成面積相等的兩部分，將等式整理，推得勾股定理的關係式：

因為 $\text{矩形}OKDI\text{面積}=\Delta ABD\text{面積}=\dfrac{1}{2}\text{矩形}ADBC\text{面積}$，所以

$$\begin{aligned}&\text{矩形}AKOE\text{面積}+\square CEOF\text{面積}+\text{矩形}OIBF\text{面積}\\&=\text{矩形}ADBC\text{面積}-\text{矩形}OKDI\text{面積}\\&=\frac{1}{2}\text{矩形}ADBC\text{面積},\end{aligned}$$

故可得

$$\text{矩形}OKDI\text{面積}=\text{矩形}AKOE\text{面積}+\square CEOF\text{面積}+\text{矩形}OIBF\text{面積},$$

即

$$pq = pr + r^2 + qr,$$

將等式兩邊同乘上 2 倍：

$$2pq = 2pr + 2r^2 + 2qr,$$

再將等式兩邊同加上 $p^2 + q^2$ ：

$$\begin{aligned} p^2 + 2pq + q^2 &= p^2 + 2pr + 2r^2 + 2qr + q^2 \\ p^2 + 2pq + q^2 &= (q^2 + 2qr + r^2) + (p^2 + 2pr + r^2) \\ (p+q)^2 &= (q+r)^2 + (p+r)^2 \end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據《勾股定理》這本書中寫道，這個證明是由荷蘭海牙的 J.Adams 在 1934 年 3 月 2 日寄給魯米斯的。
2. 心得：此證明運用圓外一點對圓作切線的兩切線段等長性質，利用輔助線作矩形，在大矩形中切割成面積相等的兩部分，再將等式推導到畢氏定理。而此證明透過代數運算的過程閱讀當下是容易理解的，但建議日後回過頭試著自行思考如何推演到勾股定理，是很棒的思考練習。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		