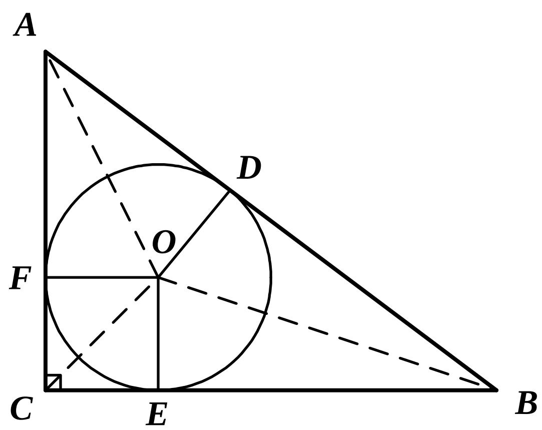
勾股定理證明-A086

【作輔助圖】

1. 分別作角A與角B的角平分線，設兩角平分線之交點為O，即為三角形ABC之內心。

2. 從O點作$\overline{BC}$的垂線，交$\overline{BC}$於E點。

3. 連接$\overline{OE}$，以$\overline{OE}$為半徑畫圓交$\overline{AB}$於D點，交$\overline{AC}$於F點，且連接$\overline{OF}$。



【求證過程】

在直角三角形ABC內作內切圓，利用內心的性質推得邊長關係式，在假設條件下推得圓半徑與邊長的表示式，由內心到三邊等距計算出三角形面積，故推得假設式成立，最後推出勾股定理成立。

1. 首先利用內心的性質，推得直角三角形ABC兩股邊長相加的等式關係：

因為圓O為直角三角形ABC的內切圓，$\overline{OE}$為其半徑，且設$\overline{OE}=r$，可知D,E,F為分別為三邊之切點，則在三角形AOF與三角形AOD中，因為$\angle AFO=\angle ADO=90°,$ $\overline{OF}=\overline{OD},\ \overline{AO}=\overline{AO}$，所以

$$\Delta AOF\cong\Delta AOD(\text{RHS 全等}),$$

推得$\overline{AF}=\overline{AD}$，同理，可推得$\overline{BD}=\overline{BE},\overline{CE}=\overline{CF}.$

又因為$\angle FCE=\angle OEC=\angle OFC=90°,\ \overline{OE}=\overline{OF}$，所以四邊形$OECF$為正方形，故

$$\overline{CE}=\overline{CF}=\overline{OE}=r.$$

將直角三角形ABC兩股邊長相加，可得

$$\begin{aligned}\overline{BC}+\overline{AC}&=\left(\overline{BE}+\overline{CE}\right)+\left(\overline{AF}+\overline{CF}\right)\\&=\left(\overline{BD}+r\right)+\left(\overline{AD}+r\right)\\&=\overline{BD}+\overline{AD}+2r\\&=\overline{AB}+2r,\end{aligned}$$

已知$\overline{BC}=a,\overline{AC}=b,\overline{AB}=c$，即

$$a+b=c+2r.$$

2. 將上述等式左右平方，在假設條件下，推得等式$cr+ar+br=ab$：

將$a+b=c+2r$左右平方，得

$$(c+2r)^2=(a+b)^2$$
$$c^2+4cr+4r^2=a^2+2ab+b^2,$$

假設$4cr+4r^2=2ab$，整理可得

$$2r(c+r)=ab,$$

由第 1 點等式可知：$2r=a+b-c$，代入上式

$$\begin{aligned}(a+b-c)(c+r)&=ab\\c(a+b-c)+r(a+b-c)&=ab\\c(a+b-c)+ra+rb-rc&=ab\\c(a+b-c-r)+ra+rb&=ab,\end{aligned}$$

再由第 1 點等式可知：$r=a+b-c-r$，代入上式，得

$$cr+ar+br=ab.$$

3. 利用內心到三邊的距離均相等求得三角形ABC面積，說明上式等式成立：

因為$\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}=r$，且$\overline{OD}\perp\overline{AB},\overline{OE}\perp\overline{BC},\overline{OF}\perp\overline{AC}$，所以

$$\Delta ABC = \Delta AOB + \Delta BOC + \Delta AOC$$
$$\frac{ab}{2} = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{2}$$
$$ab = cr + ar + br$$

故第 2 點等式 $cr + ra + rb = ab$ 成立。

4. 由於假設式 $4cr + 4r^2 = 2ab$ 成立，推出勾股定理的關係式：

因為第2點可知：$c^2 + 4cr + 4r^2 = a^2 + 2ab + b^2$，又因為 $cr + ra + rb = ab$ 成立，

則假設式 $4cr + 4r^2 = 2ab$ 亦成立。所以

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis)在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1901 年 12 月 13 日想到的。除此之外，以下期刊及書籍也有類似的證明：
   F. L. Sawyer (1901). The Pythagorean Theorem, *Mathematical Monthly*, 8(12), 258.
   E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p.94). Paris: Vuibert et Nony.
2. 心得：此證明以及其它紀載的類似證明都建立在三角形的內心到三邊的距離等距且垂直的性質上，原證明先設立假設，再驗證假設成立，是因透過另一個角度來證明比較容易，是一個方法，但此證明若善用一些代數技巧，其實可以更快推得勾股定理，譬如：因為 $a + b - c = 2r$，等式兩邊同乘上 $(a + b + c)$，則 $(a + b + c)(a + b - c) = (a + b + c)2r = 2\Delta ABC\text{面積} \Rightarrow (a + b)^2 - c^2 = 2ab$ 整理得 $c^2 = a^2 + b^2$，即可推得。鼓勵學生閱讀此證明後嘗試用不同的角度來推論此證明。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：

■ 為何利用角平分線的交點來求三角形的內心?
依角平分線性質「在角平分線上的任何點到該角的兩邊等距離」，而三角形的內切圓必滿足三角形的三邊恰與圓相切，故內心到三角形的三邊的距離就是內切圓的半徑(圓的半徑等長)。

■因此「內心的性質」為：

因為三角形的內心就是內切圓的圓心，所以內心到三邊的距離就是三角形內切圓的半徑，故內心到三邊的距離均相等。