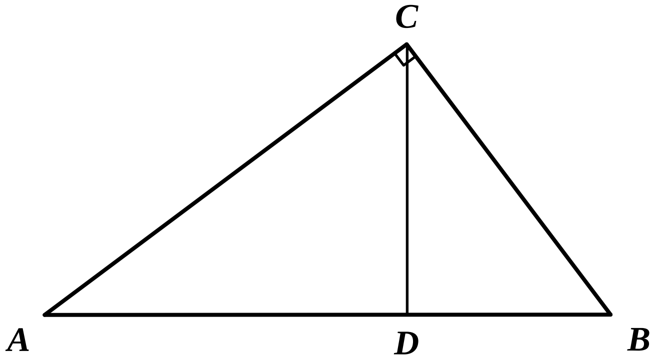
勾股定理證明-A055

【作輔助圖】

從 C 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AB}$ 於 D 點，如圖所示。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 內作輔助線，先說明圖中所有的三角形皆相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質推得邊長關係，再利用 $\overline{CD}$ 為 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BD}$ 的比例中項，將圖中兩個直角三角形各兩股邊長的平方相加得到等式關係，再相加並整理而推得勾股定理。

1. 首先證明三角形 ACD、三角形 CBD 與三角形 ABC 皆相似：
   因為 $\angle ADC = \angle ACB = 90°$ 且 $\angle DAC = \angle CAB$，可推得 $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (AA 相似)，
   同理，$\angle CDB = \angle ACB = 90°$ 且 $\angle CBD = \angle ABC$，可推得 $\Delta CBD \sim \Delta ABC$，所以
   $$\Delta ACD \sim \Delta CBD \sim \Delta ABC.$$
2. 由上述的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 ACD 與三角形 ABC 相似可知：$\overline{AC} : \overline{AD} = \overline{AB} : \overline{AC}$，整理得
   $$\overline{AC}^2 = \overline{AD} \times \overline{AB}.$$
   由三角形 CBD 與三角形 ABC 相似可知：$\overline{BC} : \overline{BD} = \overline{AB} : \overline{BC}$，整理得
   $$\overline{BC}^2 = \overline{BD} \times \overline{AB}.$$
3. 將上述兩等式相加，並整理等式，即可推得勾股定理的關係式：

$$
\begin{aligned}
\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 &= \overline{BD} \times \overline{AB} + \overline{AD} \times \overline{AB} \\
&= \left(\overline{BD} + \overline{AD}\right) \times \overline{AB} \\
&= \overline{AB} \times \overline{AB} \\
&= \overline{AB}^2,
\end{aligned}
$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, *3*(3), 65-66.

   Legendre A. M. (1858). *Elements of geometry and trigonometry* (pp. 111-112). New York: A. S. Barnes.

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 86). Amsterdam: A. Versluys.

   George C. Edwards (1896). *Elements of geometry* (p. 157). New York: Macmillan.
2. 心得：此證明的輔助圖有相當多的證法，而 A055 的原證明因為有錯誤，所以沒有呈現，採用魯米斯在《勾股定理》這本書中認為是所有勾股定理證明最簡短的方式來證，建議學生可同時參閱同樣輔助圖的 A001、A016、A032、A054 證明。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	