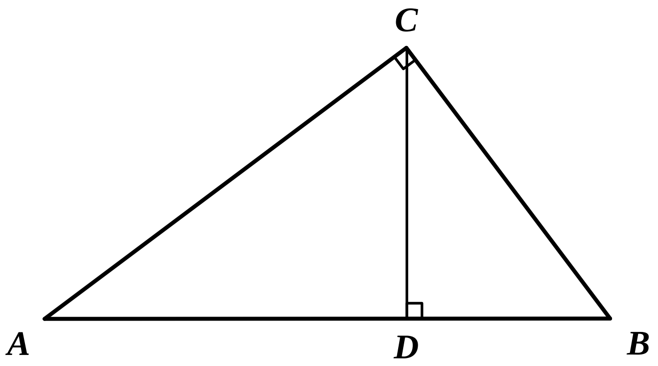
勾股定理證明-A054

【作輔助圖】

從C點作$\overline{AB}$的垂線，交$\overline{AB}$於D點，如圖所示。



【求證過程】

在直角三角形ABC內作輔助線，先說明圖中所有的三角形皆相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質推得邊長關係，再利用$\overline{CD}$為$\overline{AD}$和$\overline{BD}$的比例中項，將圖中兩個直角三角形各兩股邊長的平方相加得到等式關係，再相加並整理而推得勾股定理。

1. 首先證明三角形ACD、三角形CBD與三角形ABC皆相似：
   因為$\angle ADC = \angle ACB = 90°$且$\angle DAC = \angle CAB$，可推得$\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (AA 相似)，
   同理，$\angle CDB = \angle ACB = 90°$且$\angle CBD = \angle ABC$，可推得$\Delta CBD \sim \Delta ABC$，所以
   $$\Delta ACD \sim \Delta CBD \sim \Delta ABC.$$
2. 由上述的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形ACD與三角形CBD相似可知：$\overline{AD} : \overline{CD} = \overline{CD} : \overline{BD}$，整理得
   $$\overline{CD}^2 = \overline{AD} \times \overline{BD}.$$
   再由三角形ACD與三角形ABC相似可知：$\overline{AC} : \overline{AD} = \overline{AB} : \overline{AC}$，整理得
   $$\overline{AC}^2 = \overline{AD} \times \overline{AB}.$$
   再由三角形CBD與三角形ABC相似可知：$\overline{BC} : \overline{BD} = \overline{AB} : \overline{BC}$，整理得
   $$\overline{BC}^2 = \overline{BD} \times \overline{AB}.$$

3. 利用 $\overline{CD}$ 為 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BD}$ 的比例中項，試圖將圖中的兩個直角三角形各兩股邊長的平方相加整理，最後推出勾股定理的關係式：

由第 2 點可知：$\overline{CD}^2 = \overline{AD} \times \overline{BD}$，則

$$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AD} \times \overline{BD} = \overline{AD} \times \left(\overline{AD} + \overline{BD}\right) = \overline{AD} \times \overline{AB} = \overline{AC}^2,$$

$$\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD} \times \overline{BD} = \overline{BD} \times \left(\overline{BD} + \overline{AD}\right) = \overline{BD} \times \overline{AB} = \overline{BC}^2,$$

將上述兩式相加

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \\ \overline{AD}^2 + 2\overline{AD} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \\ (\overline{AD} + \overline{BD})^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \\ \overline{AB}^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2, \end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明是魯米斯(E.S. Loomis)在 1934 年 3 月 2 日收到的資料，寄件者是 J. Adams 來自於荷蘭海牙，但沒有提供原創作。
2. 心得：此證明與 A001 最簡短的證明一開始概念一樣，僅在直角的點上作垂線，切出兩個直角三角形，利用母子直角三角形中的比例線段找出兩股邊長的等式關係，此時，A001 證明是將兩股邊長的平方相加就可得證畢氏定理；而此證明 A054 是先將圖中的兩個小直角三角形各兩股邊長的平方相加得到兩個等式後，再相加直角三角形 ABC 的兩股邊長平方和而得證。我想此證明意味著由小窺大，由圖中小直角三角形滿足勾股定理，推得大直角三角形也成立。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	