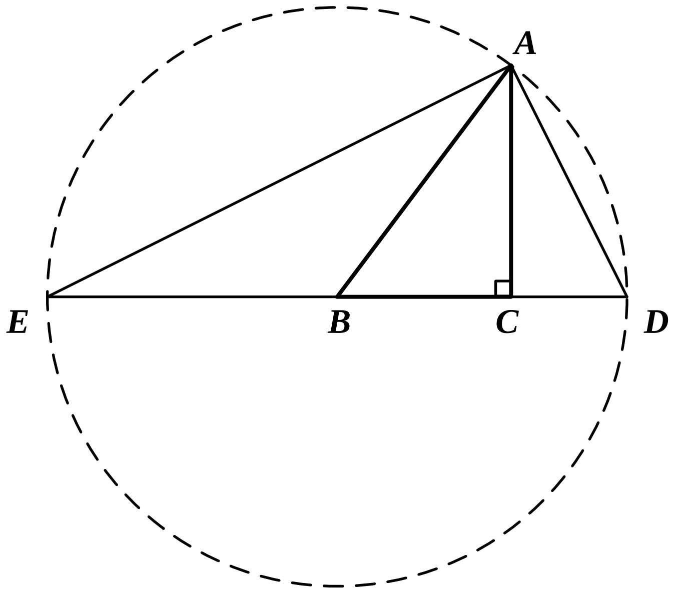
勾股定理證明-A053

【作輔助圖】

1. 將 $\overline{BC}$ 延長，在延長線上取 $\overline{BD}=\overline{BE}=\overline{AB}$ 。

2. 連接 $\overline{AD}$ 、 $\overline{AE}$ 。

3. 以 B 為圓心、 $\overline{AB}$ 為半徑畫圓。



【求證過程】

在圓內接直角三角形裡面形成兩個直角三角形，先證明三角形相似，在利用相似形「對應邊成比例」的性質推得邊長關係，由半徑相等性質，改寫等式，即可推得勾股定理。

1. 首先證明三角形 ACD 與三角形 ECA 相似，推得 $\overline{AC}$ 為 $\overline{CE}$ 和 $\overline{CD}$ 的比例中項：

   因為 $\angle EAD=\frac{1}{2}ED=\frac{1}{2}\times 180°=90°$ ，所以 $\angle DAC=\angle EAD-\angle EAC=90°-\angle EAC$ $=\angle AEC$ 且 $\angle ACD=\angle ECA=90°$ ，可推得

   $$\Delta ACD\sim\Delta ECA\,(\text{AA 相似}).$$

   故可知： $\overline{CD}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{CE}$ ，整理成

   $$\overline{AC}^2=\overline{CE}\times\overline{CD}\ .$$

2. 由半徑相等性質，改寫上述等式，即可推得勾股定理：

因為 $\overline{BD}=\overline{BE}=\overline{AB}$ ，所以

$$\overline{CE}=\overline{BE}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{BC}$$
$$\overline{CD}=\overline{BD}-\overline{BC}=\overline{AB}-\overline{BC},$$

將上述等式代回第 1 點等式，即

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{CE}\times\overline{CD}\\ &= \left(\overline{AB}+\overline{BC}\right)\left(\overline{AB}-\overline{BC}\right)\\ &= \overline{AB}^2-\overline{BC}^2,\end{aligned}$$

整理成 $$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 61). Amsterdam: A. Versluys.
   為萊布尼茲（G.W. Leibniz）想出來的。
2. 心得：原證明過程因有誤，故以上述證明呈現，利用以 B 為圓心、$\overline{AB}$ 為半徑畫圓，
   建立一個圓內接直角三角形的巧思，再由半徑相等性質，利用代數的方法將相似三角形推得的邊長關係式改寫，證明過程簡單明瞭，認為是一題透過圓的性質推得勾股定理的經典題。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	