勾股定理證明-A052

【作輔助圖】

1. 從B點作$\overline{AC}$的平行線，並在此平行線上取一點D，使得$\overline{BD}=2\overline{BC}$。

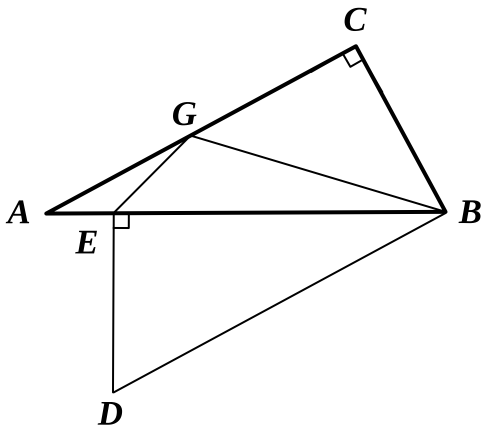
2. 從D點作$\overline{AB}$的垂線，交$\overline{AB}$於E點，如圖一。

3. 另外，取$\overline{AH}$為$\overline{AB}$和$\overline{AE}$的比例中項：

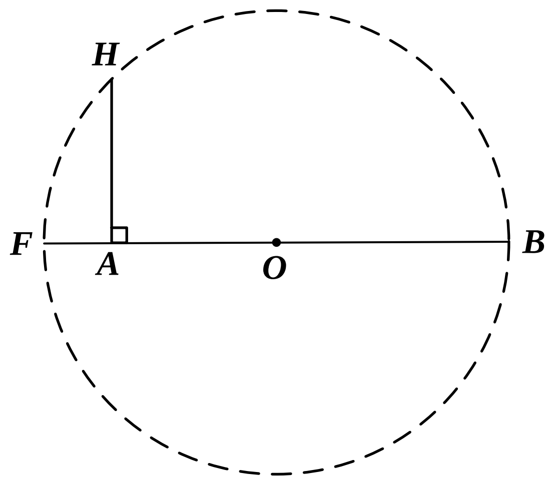
   在圖二中，將$\overline{AB}$延長至F點，使得$\overline{AF}=\overline{AE}$，以$\overline{BF}$為直徑，$O$為$\overline{BF}$之中點畫圓，

   從A點作$\overline{BF}$的垂線，交圓O於H點，則$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}\times\overline{AF}}=\sqrt{\overline{AB}\times\overline{AE}}$。

4. 回到圖一中，在$\overline{AC}$上取一點G，使得$\overline{AG}=\overline{AH}$，並連接$\overline{GE}$、$\overline{GB}$。



[圖 一]



[圖 二]

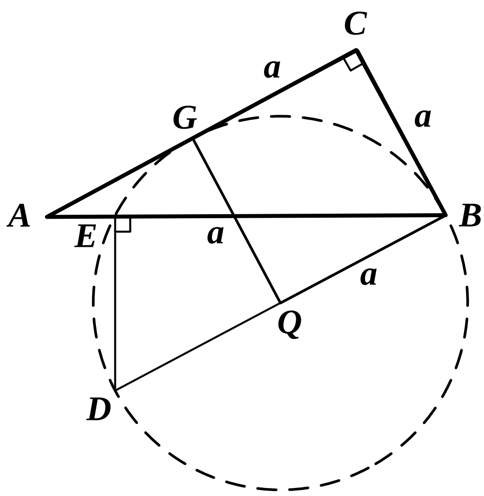
【求證過程】

在直角三角形ABC外作輔助線，分別利用「圓的外冪性質」及相似三角形的「對應邊成比例」性質，推得$\overline{EB}$邊長的兩種不同表示式，最後將等式整理，推出勾股定理關係式。

1. 首先利用$\overline{AG}$為$\overline{AB}$和$\overline{AE}$的比例中項，而推得$\overline{AG}$,$\overline{EB}$邊長表示式：

   因為三角形BDE為直角三角形，所以外心為斜邊之中點，則以$\overline{BD}$為直徑，Q為$\overline{BD}$之中點畫圓，如下圖。由於$\overline{AG}=\sqrt{\overline{AB}\times\overline{AE}}\Rightarrow\overline{AG}^2=\overline{AB}\times\overline{AE}$，滿足「圓的外冪

性質」，則 $\overline{AG}$ 為圓的切線，G 為切點。



由 G 為切點，則 $\angle QGC = 90°$,
又 $\angle ACB = 90°$, 則 $\overline{QG} // \overline{BC}$ ，
加上 $\overline{BC} = \overline{QB} = \overline{QG}$ 的條件，
可知

四邊形 $GQBC$ 為正方形，

推得

$$\overline{CG} = a$$

故

$$\overline{AG} = \overline{AC} - \overline{CG} = b - a \ .$$

接著，將上式 $\overline{AG} = b - a$ 代入 $\overline{AG}^2 = \overline{AB} \times \overline{AE}$ 式子，整理得

$$(b-a)^2 = c(c - \overline{EB})$$

$$\overline{EB} = \frac{c^2 - (b-a)^2}{c}.$$

2. 證明三角形 BDE 與三角形 ABC 相似，而推得 $\overline{EB}$ 邊長表示式：

因為 $\overline{AC} // \overline{DB}$ ，所以 $\angle CAB = \angle EBD$ ，又 $\angle ACB = \angle BED = 90°$ ，可推得

$$\Delta BDE \sim \Delta ABC \text{ (AA 相似)}.$$

可知

$$\overline{EB} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{AB}$$

$$\overline{EB} \times c = 2ab$$

$$\overline{EB} = \frac{2ab}{c}.$$

3. 由第 1、2 點推得 $\overline{EB}$ 邊長有兩種不同方式的表示，利用等式關係，推出勾股定理的關係式：

$$\frac{c^2 - (\mathrm{b} - \mathrm{a})^2}{c} = \frac{2ab}{c}$$

$$c^2 - (\mathrm{b} - \mathrm{a})^2 = 2ab$$

$$c^2 - \left(b^2 - 2ab + a^2\right) = 2ab$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis)在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1926 年 2 月 28 日想到的。
2. 心得：作此證明的輔助線同時建立兩種概念「圓的外冪性質」及相似三角形的「對應邊成比例」性質，分別推得圓 Q 中割線 $\overline{EB}$ 的表示式。但針對其中 $\overline{AG}$ 為 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AE}$ 的比例中項，能夠很直覺地想到原來滿足「圓的外冪性質」，進一步求得 $\overline{AG}$ 表示式這部分實屬不易，因此下方第 4 點補充詳細證明過程，好讓學生重溫。
3. 評量：

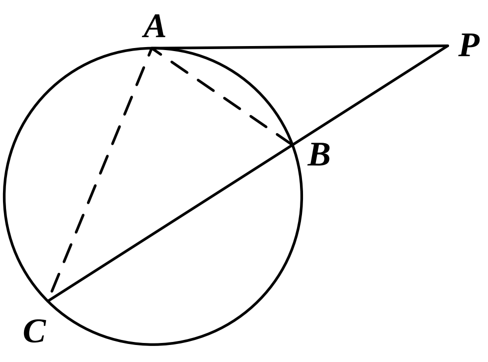
國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：

■ 圓的外冪性質：

令 $\overline{AP}$ 為圓的一切線，A 為切點。$\overline{BC}$ 為圓的一條弦，$\overline{BC}$ 的延長線交 $\overline{AP}$ 於 P 點，

$$則\ \overline{AP}^2 = \overline{PB} \times \overline{PC}.$$



(1) 連接 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$

(2) 因為 $\angle PAB = \angle ACB$ (對應到同弧故等角)

$\angle APB = \angle APC$ (對應到同弧的圓周角相等)

所以 $\Delta APB \sim \Delta CPA$ (AA相似).

(3) 可知相似三角形對應邊成比例，所以

$$\overline{PA} : \overline{PB} = \overline{PC} : \overline{PA}$$

整理得

$$\overline{AP}^2 = \overline{PB} \times \overline{PC}\ .$$