# 勾股定理證明-A051

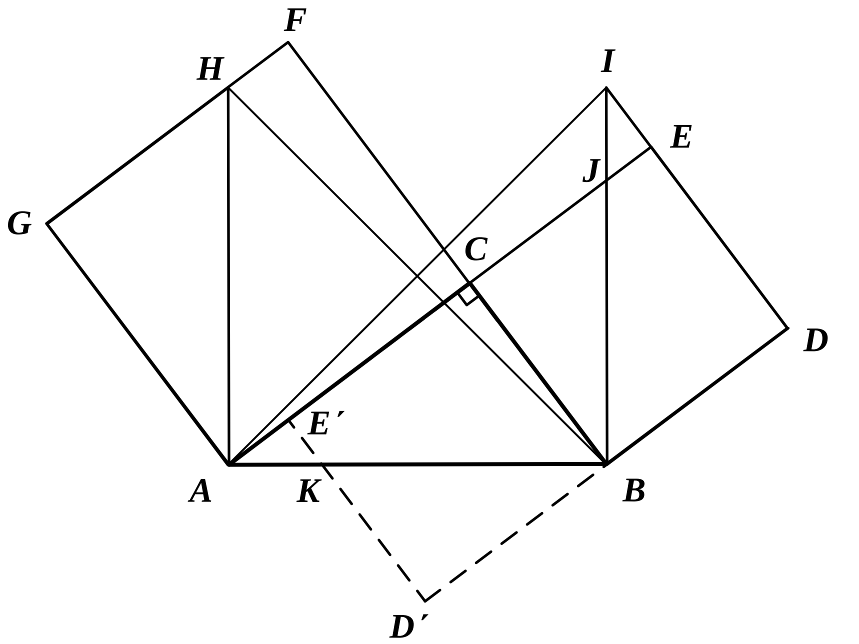
【作輔助圖】

1. 以 $\overline{BC}$ 為邊長，向外作一正方形 $CBDE$ ；以 $\overline{AC}$ 為邊長，向內作一正方形 $ACFG$ 。

2. 從 $A$ 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{GF}$ 於 $H$ 點，且連接 $\overline{HB}$ 。

3. 從 $B$ 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{DE}$ 的延長線於 $I$ 點，且連接 $\overline{IA}$ 。

4. 以 $\overline{BC}$ 為對稱軸，作一正方形 $CBD'E'$ 為正方形 $CBDE$ 的對稱圖形，且交 $\overline{AB}$ 於 $K$ 點。




【求證過程】

在直角三角形 $ABC$ 外作輔助線，先證明圖中部分的三角形全等，以求得與正方形面積相等的四邊形，利用面積相等性質以不同的面積表示式改寫兩股邊上的正方形面積式，試圖將兩股的平方相加，即可推得勾股定理的關係式。

1. 首先證明正方形 $ACFG$ 面積與四邊形 $AHFB$ 面積相等：
   先證明三角形 $AHG$ 與三角形 $ABC$ 全等：

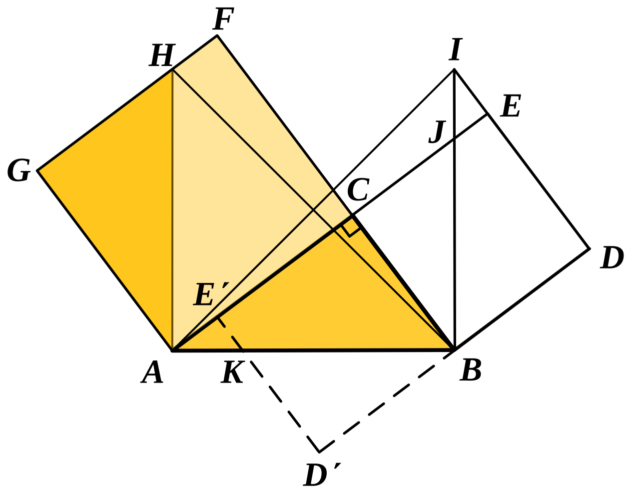
   因為 $\overline{AG}=\overline{AC}, \angle AGH=\angle ACB=90°, \overline{GH}=\overline{BC}$ ，所以

   $$\Delta AHG \cong \Delta ABC\text{( SAS 全等)},$$

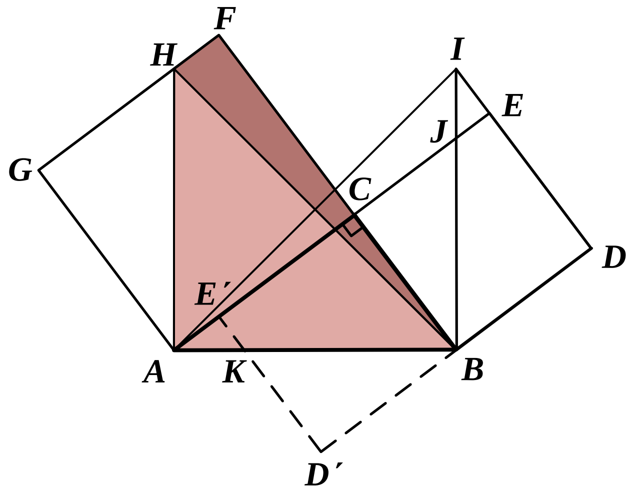
   由圖一可知四邊形 $HACF$ 為正方形 $ACFG$ 與四邊形 $AHFB$ 重疊的部分，所以

   $$\square AGFC=\Delta AHG+\text{四邊形}AHFC=\Delta ABC+\text{四邊形}AHFC=\text{四邊形}AHFB.$$

   又因為 $\square AGFC\text{面積}=\overline{AC}^2$ ，所以四邊形 $AHFB$ 面積 $=\overline{AC}^2$.




[圖一]




[圖二]

2. 將四邊形 $AHFB$ 視為兩塊三角形的面積和：

由圖二可知

$$四邊形AHFB=\Delta HAB+\Delta HFB,$$

其中，因為 $\angle HAB = 90°$ ，由第 1 點可知 $\overline{AH} = \overline{AB}$ ，所以

$$\Delta HAB = \frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB}^2,$$

$$\Delta HFB = \frac{1}{2}\times\overline{HF}\times\overline{FB} = \frac{1}{2}\times\left(\overline{GF}-\overline{GH}\right)\times\left(\overline{CF}+\overline{BC}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\overline{AC}-\overline{BC}\right)\times\left(\overline{AC}+\overline{BC}\right),$$

且由第 1 點結論可知：四邊形$AHFB$面積$=\overline{AC}^2$ ，因此將上述面積表示式代入，

故可得

$$四邊形AHFB = \Delta HAB + \Delta HFB$$

$$\overline{AC}^2 = \frac{1}{2}\overline{AB}^2 + \frac{1}{2}\times\left(\overline{AC}-\overline{BC}\right)\times\left(\overline{AC}+\overline{BC}\right).$$

3. 接著證明三角形 $IBD$ 與三角形 $ABC$ 全等，並推得邊長與角度關係：

因為 $\overline{DI} = \overline{AC}, \overline{ID} = \overline{AC}, \angle IDB = \angle ACB = 90°, \overline{BD} = \overline{BC}$ ，所以

$$\Delta IBD \cong \Delta ABC\ (\text{SAS 全等}),$$

故可得

$$\overline{IB} = \overline{AB}, \angle DIB = \angle CAB, \angle IBD = \angle ABC.$$

4. 證明正方形 $CBD'E'$ 面積與四邊形 $E'KBJ$ 面積相等：

先證明三角形 $KD'B$ 與三角形 $JCB$ 全等：

由上述第 3 點結論 $\angle IBD = \angle ABC$ ，則

$\angle D^{'}BK = \angle D^{'}BC - \angle ABC = \angle CBD - \angle IBD = \angle CBJ$ ，又因為

$\angle KD^{'}B = \angle JCB = 90^{\circ}, \overline{D^{'}B} = \overline{BC}$ ，所以

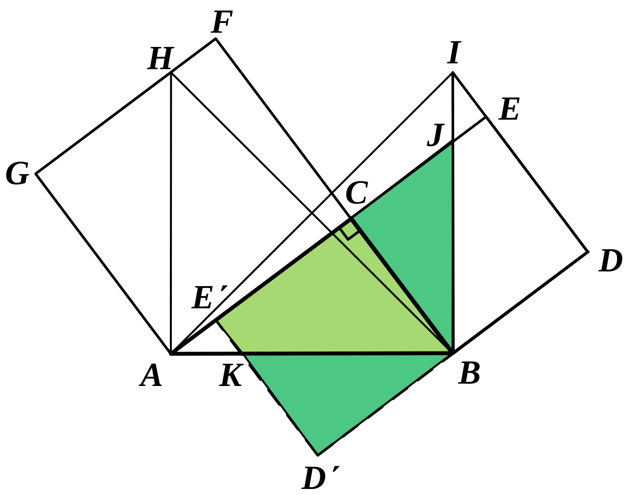
$$\Delta KD^{'}B \cong \Delta JCB \text{( ASA 全等)},$$

由圖三可知四邊形 $E^{'}KBC$ 為正方形 $CBD^{'}E^{'}$ 與四邊形 $E^{'}KBJ$ 重疊的部分，所以

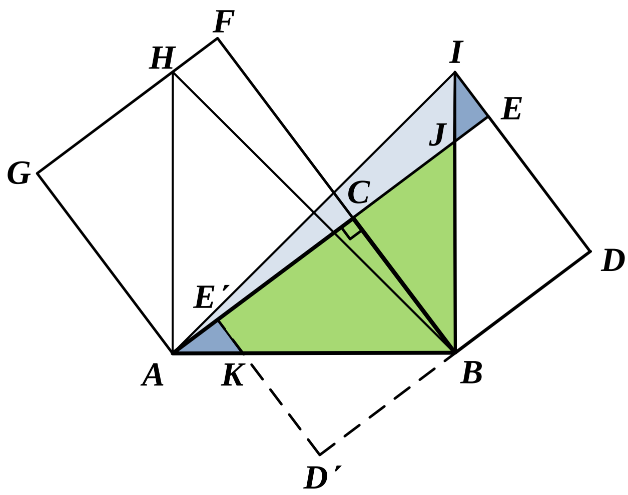
$$\square CBD^{'}E^{'} = \Delta KD^{'}B + \text{四邊形} BKE^{'}C = \Delta JCB + \text{四邊形} BKE^{'}C = \text{四邊形} E^{'}KBJ.$$

又因為正方形 $CBD^{'}E^{'}$ 為正方形 $CBDE$ 的對稱圖形，所以面積為 $\overline{BC}^{2}$ ，則

四邊形 $E^{'}KBJ$ 面積 $= \overline{BC}^{2}.$



[ 圖 三 ]



[ 圖 四 ]

5. 接著先證明三角形 $AE^{'}K$ 與與三角形 $IEJ$ 全等：

由第 3 點可知 $\angle E^{'}AK = \angle CAB = \angle DIB = \angle EIJ$ ，又因為

$\overline{AE^{'}} = \overline{AC} - \overline{CE^{'}} = \overline{ID} - \overline{ED} = \overline{IE}, \angle AE^{'}K = \angle IEJ = 90^{\circ}$ ，所以

$$\Delta AE^{'}K \cong \Delta IEJ \text{ ( ASA 全等)}.$$

6. 將三角形 $IBA$ 扣除兩塊三角形而得到四邊形 $E^{'}KBJ$ 的面積：

由圖四可知

$$四邊形 E'KBJ = \Delta IBA - \Delta AIJ - \Delta AE'K,$$

其中由第 5 點可知，三角形 $AE'K$ 與三角形 $IEJ$ 全等，所以

$$\begin{aligned} 四邊形 E'KBJ &= \Delta IBA - \Delta AIJ - \Delta AE'K \\ &= \Delta IBA - \left(\Delta AIJ + \Delta IEJ\right) \\ &= \Delta IBA - \Delta AIE, \end{aligned}$$

其中，因為 $\angle IAB = 90^\circ$，由第 3 點可知 $\overline{IB} = \overline{AB}$ ，所以

$$\Delta IBA = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{IB} = \frac{1}{2} \overline{AB}^2,$$

$$\Delta AIE = \frac{1}{2} \times \overline{IE} \times \overline{AE} = \frac{1}{2} \times \left(\overline{ID} - \overline{ED}\right) \times \left(\overline{AC} + \overline{CE}\right) = \frac{1}{2} \times \left(\overline{AC} - \overline{BC}\right) \times \left(\overline{AC} + \overline{BC}\right),$$

且由第 4 點結論可知：四邊形 $E'KBJ$ 面積 $= \overline{BC}^2,$

因此將上述面積表示式代入，故可得

$$\begin{aligned} 四邊形 E'KBJ &= \Delta IBA - \Delta AIE \\ \overline{BC}^2 &= \frac{1}{2} \overline{AB}^2 - \frac{1}{2} \times \left(\overline{AC} - \overline{BC}\right) \times \left(\overline{AC} + \overline{BC}\right). \end{aligned}$$

7. 由第 2 點及第 6 點結論已知兩股的平方分別可改寫成不同的表示式，試圖將兩股的平方相加，即可推得勾股定理關係式：

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 &= \frac{1}{2} \overline{AB}^2 - \frac{1}{2} \times \left(\overline{AC} - \overline{BC}\right) \times \left(\overline{AC} + \overline{BC}\right) + \frac{1}{2} \overline{AB}^2 + \frac{1}{2} \times \left(\overline{AC} - \overline{BC}\right) \times \left(\overline{AC} + \overline{BC}\right) \\ &= \overline{AB}^2 \end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1876). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 67). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：此證明是利用面積相等將兩股的平方分別改寫成不同的表示式，將兩式相加得以推出勾股定理。利用等價的表示式換算，是典型的代數證明之一。

3. 評量：

| 國中 | 高中 | 教學 | 欣賞 | 美學 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ● | | ● | ● | |