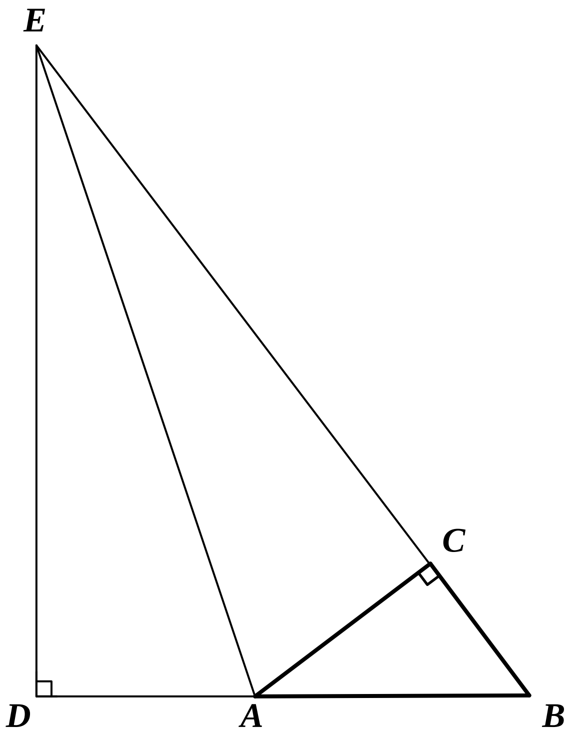
勾股定理證明-G245

【作輔助圖】

1. 將$\overline{BA}$延長到D點，使得$\overline{AD}=\overline{AC}$。

2. 從D點作$\overline{DB}$的垂線，交$\overline{BC}$的延長線於E點。

3. 連接$\overline{AE}$。



【求證過程】

在直角三角形ABC外作輔助線，先說明圖中部分的三角形全等與相似關係，再利用相似形「對應邊成比例」的性質推得邊長關係，代入直角三角形ABC面積的恆等式，可推出勾股定理的關係式。

1. 首先說明三角形EDA與三角形ECA全等：

   因為$\angle EDA=\angle ECA=90°, \overline{AD}=\overline{AC}, \overline{AE}$為共同邊長，所以

$$\Delta EDA \cong \Delta ECA \text{(RHS 全等)}.$$

2. 證明三角形EBD與三角形ABC相似：
   因為$\angle EBD=\angle ABC$且$\angle EDB=\angle ACB=90°$，所以

$$\Delta EBD \sim \Delta ABC \text{(AA 相似)},$$

故可知 $\overline{BD}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{AC}$ ，整理得

$$\overline{DE}\times\overline{BC}=\overline{AC}\times\overline{BD}$$
$$\overline{DE}=\frac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{\overline{BC}}.$$

3. 利用直角三角形 ABC 面積等於直角三角形 EBD 面積扣掉兩塊直角三角形 EDA ，再由前述結論得到的邊長關係代入計算，將等式整理，推出勾股定理的相關式：
因為

$$\Delta ABC=\Delta EBD-\left(\Delta EDA+\Delta ECA\right)$$
$$\Delta ABC=\Delta EBD-2\Delta EDA\ ,$$

計算面積

$$\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{DE}\times\overline{BD}-2\left(\frac{1}{2}\overline{DE}\times\overline{AD}\right)$$
$$\overline{AC}\times\overline{BC}=\overline{DE}\times\overline{BD}-2\overline{DE}\times\overline{AD}$$

由第 2 點結論 $\overline{DE}=\dfrac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{\overline{BC}}$ ，及 $\overline{BD}=\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{AC}$ ，可整理得

$$\overline{AC}\times\overline{BC}=\overline{DE}\times\overline{BD}-2\overline{DE}\times\overline{AD}$$
$$\overline{AC}\times\overline{BC}=\left(\frac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{\overline{BC}}\right)\times\overline{BD}-2\left(\frac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{\overline{BC}}\right)\times\overline{AD}$$
$$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2-2\overline{BD}\times\overline{AD}$$
$$\overline{BC}^2=\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)^2-2\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)\times\overline{AC}$$
$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+2\overline{AB}\times\overline{AC}+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\times\overline{AC}-2\overline{AC}^2$$
$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2$$

因此

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

Benj. F. Yanney and James. A.(1898). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly,* 6(3), 70.

2. 心得：此證明技巧性的在直角三角形外作一個與之相似的三角形，利用其中的相似形「對應邊成比例」的性質推得邊長關係，運用代數運算，由面積的恆等式而證得。在《勾股定理》的 A005 為代數證明的參考範例。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		