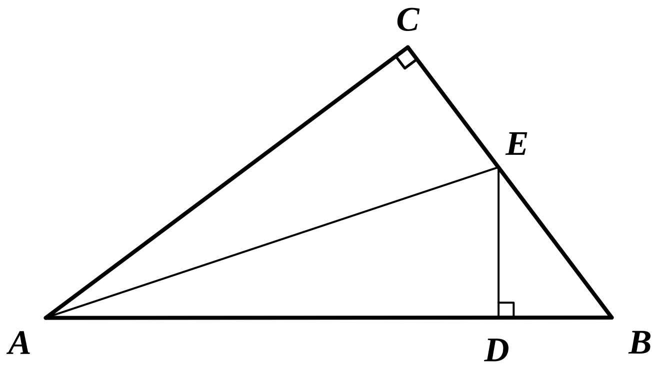
勾股定理證明-G244

【作輔助圖】

1. 在 $\overline{AB}$ 邊上取一點 D，使得 $\overline{AD}=\overline{AC}$。

2. 從 D 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{BC}$ 於 E 點。

3. 連接 $\overline{AE}$。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 內作輔助線，先說明圖中部分的三角形全等與相似關係，再利用相似形「對應邊成比例」的性質推得邊長關係，代入直角三角形 ABC 面積的恆等式，可推出勾股定理的關係式。

1. 首先說明三角形 ADE 與三角形 ACE 全等：

   因為 $\angle ADE=\angle ACE=90°, \overline{AD}=\overline{AC}, \overline{AE}$ 為共同邊長，所以

$$\Delta ADE \cong \Delta ACE \text{ (RHS 全等)}.$$

2. 證明三角形 EBD 與三角形 ABC 相似：
   因為 $\angle EBD=\angle ABC$ 且 $\angle EDB=\angle ACB=90°$，所以

$$\Delta EBD \sim \Delta ABC \text{ (AA 相似)},$$

   故可知 $\overline{BD}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{AC}$，整理得

$$\overline{DE}\times\overline{BC}=\overline{AC}\times\overline{BD}$$

$$\overline{DE}=\frac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{\overline{BC}}.$$

3. 利用直角三角形 ABC 面積等於切割成三塊的面積和，再由前述結論得到的邊長關係代入計算，將等式整理，推出勾股定理的相關式：

因為

$$\Delta ABC = \Delta ACE + \Delta ADE + \Delta EBD$$
$$\Delta ABC = 2\Delta ADE + \Delta EBD,$$

計算面積

$$\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BC} = 2\left(\frac{1}{2}\overline{AD}\times\overline{DE}\right) + \left(\frac{1}{2}\overline{BD}\times\overline{DE}\right)$$
$$\overline{AC}\times\overline{BC} = 2\left(\overline{AC}\times\overline{DE}\right) + \left(\overline{BD}\times\overline{DE}\right)$$

由第 2 點結論 $\overline{DE} = \dfrac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{\overline{BC}}$ ，及 $\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = \overline{AB} - \overline{AC}$ ，可整理得

$$\overline{AC}\times\overline{BC} = 2\left(\overline{AC}\times\overline{DE}\right) + \left(\overline{BD}\times\overline{DE}\right)$$
$$\overline{AC}\times\overline{BC} = 2\overline{AC}\times\left(\frac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{\overline{BC}}\right) + \overline{BD}\times\left(\frac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{\overline{BC}}\right)$$
$$\overline{BC}^2 = 2\overline{AC}\times\overline{BD} + \overline{BD}^2$$
$$\overline{BC}^2 = 2\overline{AC}\times\left(\overline{AB} - \overline{AC}\right) + \left(\overline{AB} - \overline{AC}\right)^2$$
$$\overline{BC}^2 = 2\overline{AC}\times\overline{AB} - 2\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AB}\times\overline{AC} + \overline{AC}^2$$
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$$

由上述結果可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Benj. F. Yanney and James. A.(1898). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 6(3), 70.
2. 心得：
   (1) 此證明技巧性的將直角三角形切割成三塊三角形，利用其中的相似形「對應邊成比例」的性質推得邊長關係，運用代數運算，由面積的恆等式而證得。

(2) 此證明透過代數證明的方式，可參考《勾股定理》的 A005。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	