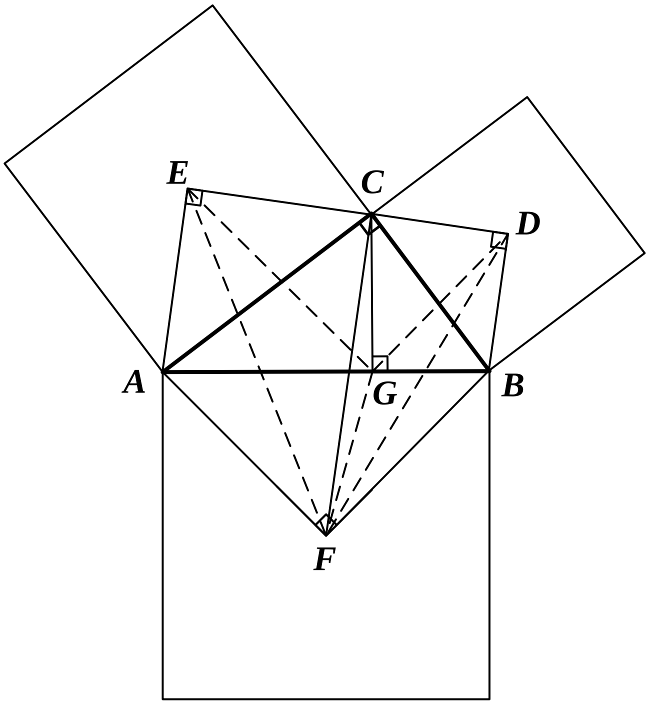
勾股定理證明-G235

【作輔助圖】

1. 以直角三角形ABC的三邊$\overline{BC},\overline{AC},\overline{AB}$為邊長，分別向外作三個正方形，將每一正方形對角線連接，可得三個等腰直角三角形CDB, AEC, AFB。
2. 連接$\overline{CF}$。
3. 從C點作$\overline{AB}$的垂線，交$\overline{AB}$於G點。
4. 連接$\overline{GD},\overline{GF},\overline{DF},\overline{GE},\overline{EF}$。



【求證過程】

直角三角形ABC三邊上有三個相似等腰直角三角形，透過輔助線的切割，證明較小的兩個等腰直角三角形面積和等於最大的等腰直角三角形面積，最後將等式整理，推出勾股定理的關係式。

1. 證明$E-C-D$三點共線，且$\overline{CF}$垂直於$\overline{ED}$，可推得$\overline{CF}$與$\overline{AE},\overline{BD}$平行：

   在四邊形$AFBC$中，因為$\angle ACB=\angle AFB=90^\circ$，所以四邊形$AFBC$為圓內接四邊形，

   此圓直徑為$\overline{AB}$，圓心為$\overline{AB}$之中點，因為$\angle FCB$與$\angle FAB$的對應弧同為BF，所以

   $\angle FCB=\angle FAB=45^\circ$ (圓周角一樣)，又因$\angle BCD=45^\circ$，所以

$$\angle FCD = \angle FCB + \angle BCD = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

又因為 $\angle ECD = \angle ECA + \angle ACB + \angle BCD = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$，所以 $E-C-D$ 三點共線，且 $\overline{CF}$ 垂直於 $\overline{ED}$，因此可推得

$$\overline{CF} // \overline{BD} // \overline{AE}.$$

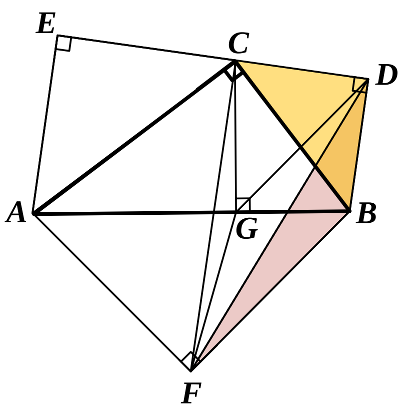
2. 由上述平行關係說明 $\overline{BC}$ 邊上的等腰直角三角形面積相等於三角形 BFG：

由圖一可知

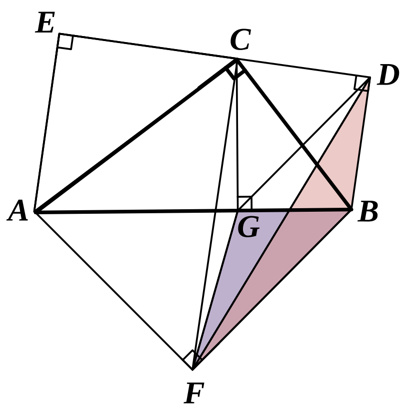
$$\Delta CDB = \Delta BDF \text{ (同以 } \overline{BD} \text{ 為底，} \overline{CD} \text{ 為高),}$$

接著在四邊形 $CGBD$ 中，因為 $\angle CGB = \angle CDB = 90^\circ$，所以四邊形 $CGBD$ 為圓內接四邊形，因此 $\angle BGD = \angle BCD = 45^\circ$ (對應弧同為 BD，則圓周角一樣)，且因 $\angle GBF = 45^\circ$，所以 $\overline{DG} // \overline{BF}$，由圖二可知

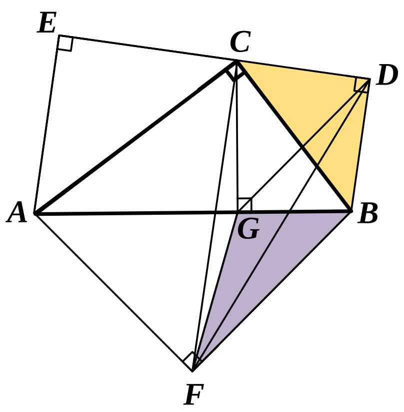
$$\Delta BDF = \Delta BFG \text{ (同以 } \overline{BF} \text{ 為底，因 } \overline{DG} // \overline{BF} \text{ 其高一樣),}$$



[圖一]



[圖二]



[圖三]

由上述可得

$$\Delta CDB = \Delta BFG.\text{(如圖三)}$$

3. 證明 $\overline{AC}$ 邊上的等腰直角三角形面積相等於三角形 AFG：

由圖可知

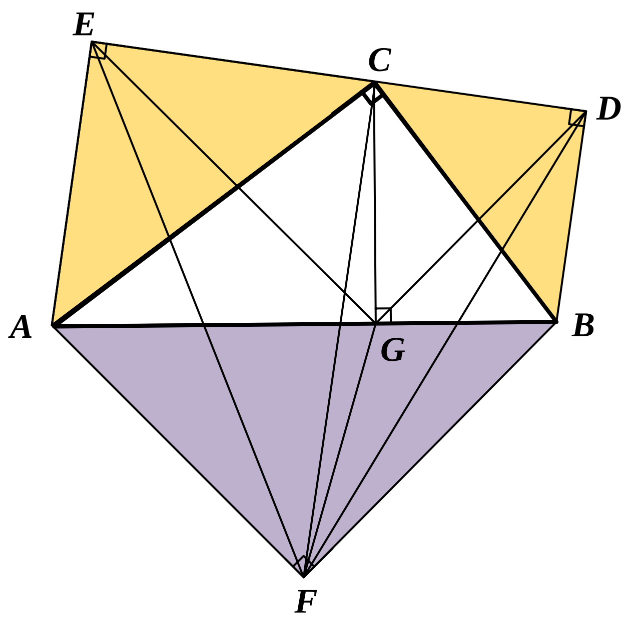
$$\Delta AEC = \Delta AEF \text{ (同以 } \overline{AE} \text{ 為底，} \overline{CE} \text{ 為高),}$$

接著在四邊形 $AGEC$ 中，因為 $\angle AGC = \angle AEC = 90^\circ$，所以四邊形 $AGEC$ 為圓內接四邊形，因此 $\angle AGE = \angle ACE = 45^\circ$ (對應弧同為 AE，則圓周角一樣)，又因 $\angle GAF = 45^\circ$，所以 $\overline{EG} // \overline{AF}$，故

$$\Delta AEF = \Delta AFG \text{ (同以 } \overline{AF} \text{ 為底，因 } \overline{EG} // \overline{AF} \text{ 其高一樣),}$$

由上述可得

$$\Delta AEC = \Delta AFG.$$



4. 最後由第 2, 3 點結論可推得較小的兩個等腰三角形面積和相等最大的等腰三角形，推論出勾股定理的相關式：

$$\begin{aligned}\Delta AFB &= \Delta BFG + \Delta AFG \\ &= \Delta CDB + \Delta AEC,\end{aligned}$$

又因為每一等腰直角三角形為其對應的正方形之 $\frac{1}{4}$ 等分，可得：

$$\frac{1}{4}\overline{AB}^2 = \frac{1}{4}\overline{BC}^2 + \frac{1}{4}\overline{AC}^2$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1907). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 91). Amsterdam: A. Versluys.

   E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p. 79). Paris: Vuibert et Nony.

2. 心得：

   (1) 此證明與《勾股定理》的 G234 證明想法非常相似，差別在於此題是透過輔助線的切割，在同底同高下證得三角形面積相等；G234 的證明是藉由建立兩個四邊形面積相等的結果，兩者最後都推得較小的兩個等腰直角三角形面積和相等最大的等腰直角三角形面積。

   (2) 在《勾股定理》這本書的勾股定理證明- A105、A106、A108 證明直角三角形三邊向外延伸為三個相似的任意三角形與等腰三角形、正五邊形的例子，亦可發現以直角三角形三邊向外延伸的圖形不一定是正方形，只要是相似之形狀，仍有面積和之關係。

   (3) 此證明透過代數證明的方式，可參考《勾股定理》的 A066。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	