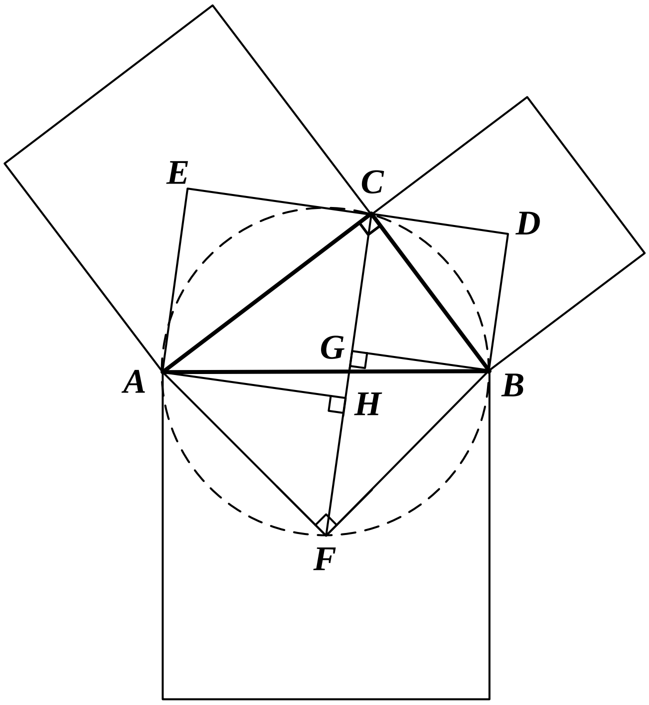
勾股定理證明-G234

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的三邊 $\overline{BC},\overline{AC},\overline{AB}$ 為邊長，分別向外作三個正方形，將每一正方形對角線連接，可得三個等腰直角三角形 CDB,AEC,AFB。
2. 連接 $\overline{CF}$。
3. 從 B 點作 $\overline{CF}$ 的垂線，交 $\overline{CF}$ 於 G 點。
4. 從 A 點作 $\overline{CF}$ 的垂線，交 $\overline{CF}$ 於 H 點。



【求證過程】

證明圖中四邊形 $AFBC$ 面積與梯形 $ABDE$ 面積相等，使得較小的等腰直角三角形面積和等於最大的等腰直角三角形面積，最後將等式整理，推出勾股定理的關係式。

1. 證明 $E-C-D$ 三點共線，且 $\overline{CF}$ 垂直於 $\overline{ED}$：

   在四邊形 $AFBC$ 中，因為 $\angle ACB=\angle AFB=90^\circ$，所以四邊形 $AFBC$ 為圓內接四邊形，

   此圓直徑為 $\overline{AB}$，圓心為 $\overline{AB}$ 的中點，因為 $\angle FCB$ 與 $\angle FAB$ 的對應弧同為 BF，所以

   $\angle FCB=\angle FAB=45^\circ$ (圓周角一樣)，且因 $\angle BCD=45^\circ$，所以

$$\angle FCD = \angle FCB + \angle BCD = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

又因為 $\angle ECD = \angle ECA + \angle ACB + \angle BCD = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$，所以

$$E - C - D \text{ 三點共線。}$$

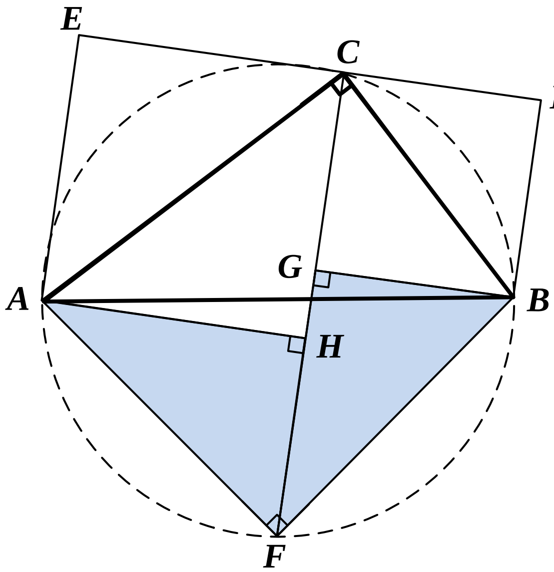
且由前述得 $\angle FCD = 90^\circ$，所以 $\overline{CF}$ 垂直於 $\overline{ED}$.

2. 由上述直角關係說明四邊形 $CGBD$ 及四邊形 $EAHC$ 為正方形：

   因為 $\angle FCD = \angle CDB = \angle BGC = 90^\circ, \overline{CD} = \overline{BD}$，所以四邊形 $CGBD$ 為正方形。

   因為 $\angle AEC = \angle ECF = \angle AHC = 90^\circ, \overline{AE} = \overline{EC}$，所以四邊形 $EAHC$ 為正方形。

3. 證明 ΔAHF 與 ΔFGB 全等，推得兩三角形的邊長關係：



   因為 $\overline{AF} = \overline{FB}, \angle AHF = \angle FGB = 90^\circ, \angle HAF = 90^\circ - \angle AFH = \angle GFB$，所以

$$\Delta AHF \cong \Delta FGB \text{ (AAS 全等)},$$

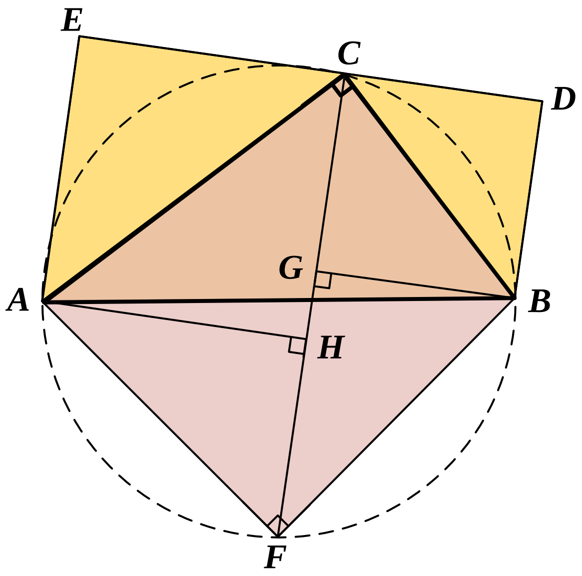
   因此可得

$$\overline{FH} = \overline{BG} \ ; \overline{GF} = \overline{AH}.$$

4. 接著證明四邊形 $AFBC$ 面積與梯形 $ABDE$ 面積相等：

   由圖形可知

$$\text{四邊形}AFBC = \Delta AFC + \Delta FBC = \frac{1}{2}\overline{CF}\times\overline{AH} + \frac{1}{2}\overline{CF}\times\overline{BG}$$



$$= \frac{1}{2}\overline{CF}\times(\overline{AH}+\overline{BG})$$
$$= \frac{1}{2}\overline{CF}\times(\overline{EC}+\overline{CD})$$
$$= \frac{1}{2}\overline{CF}\times\overline{ED}$$
$$= \frac{1}{2}(\overline{CG}+\overline{GF})\times\overline{ED}$$
$$= \frac{1}{2}(\overline{BD}+\overline{AH})\times\overline{ED}$$
$$= \frac{1}{2}(\overline{BD}+\overline{AE})\times\overline{ED}$$
$$= \text{梯形面積 } ABDE \text{ 面積}$$

5. 最後由上述證明結果，使得較小的兩個等腰直角三角形面積和等於最大的等腰直角三角形面積，推論出勾股定理的相關式：
   因為
   $$\text{四邊形}AFBC\text{面積} = \text{梯形}ABDE\text{面積},$$
   由圖可知三角形 ABC 為四邊形 $AFBC$ 與梯形 $ABDE$ 重疊的部分，因此
   $$\Delta AFB = \Delta CDB + \Delta AEC,$$
   又因為每一等腰直角三角形為其對應的正方形之 $\frac{1}{4}$ 等分，可得：
   $$\frac{1}{4}\overline{AB}^2 = \frac{1}{4}\overline{BC}^2 + \frac{1}{4}\overline{AC}^2$$
   $$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$
   即
   $$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1907). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 90). Amsterdam: A. Versluys.
   E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p. 78). Paris: Vuibert et Nony.

2. 心得：

   (1) 此證明為了證明四邊形 $AFBC$ 面積與梯形 $ABDE$ 面積相等的過程中，程

序複雜不少，也較難直覺想出，需花費較大的耐心層層推演。

(2) 最後由四邊形 *AFBC* 面積相等於梯形 *ABDE* 面積的結果，推得直角三角形三邊上的三個相似等腰直角三角形關係，可知較小的兩邊的等腰直角三角形面積和會等於斜邊上的等腰直角三角形面積而證得畢氏定理。

(3) 在《勾股定理》這本書的勾股定理證明- A105、A106、A108 證明直角三角形三邊向外延伸為三個相似的任意三角形與等腰三角形、正五邊形的例子，亦可發現以直角三角形三邊向外延伸的圖形不一定是正方形，只要是相似之形狀，仍有面積和之關係。

(4) 此證明透過代數證明的方式，可參考《勾股定理》的 A067。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	