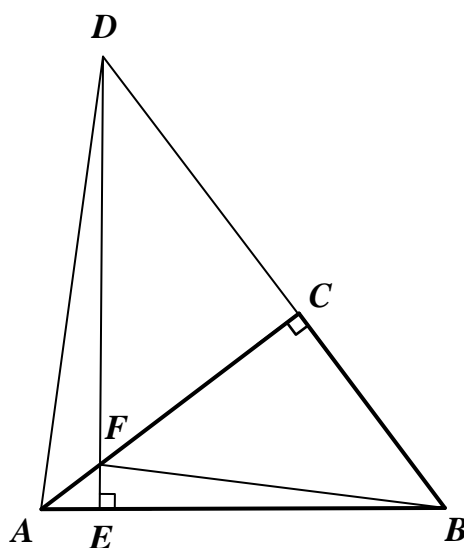


勾股定理證明-G233

【作輔助圖】

1. 將 \overline{BC} 延長至 D 點，使得 $\overline{CD} = \overline{AC}$ 。
2. 從 D 點作 \overline{AB} 的垂線，交 \overline{AB} 於 E 點，交 \overline{AC} 於 F 點。
3. 連接 \overline{AD} 及 \overline{BF} 。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，先說明圖中部分的三角形全等，最後利用凹四邊形 $DAFB$ 切割成兩種不同的三角形方式算面積，運用其面積相等的關係，推出勾股定理的關係式。

1. 首先說明三角形 DFC 全等於三角形 ABC ：

因為 $\angle DCF = \angle AEF = 90^\circ$ ， $\angle DFC = \angle AFE$ (對頂角相等)，所以 $\angle CDF = \angle CAB$ ；因

為由 $\angle DCF = \angle ACB = 90^\circ$ ， $\overline{CD} = \overline{AC}$ ，及前述 $\angle CDF = \angle CAB$ ，所以

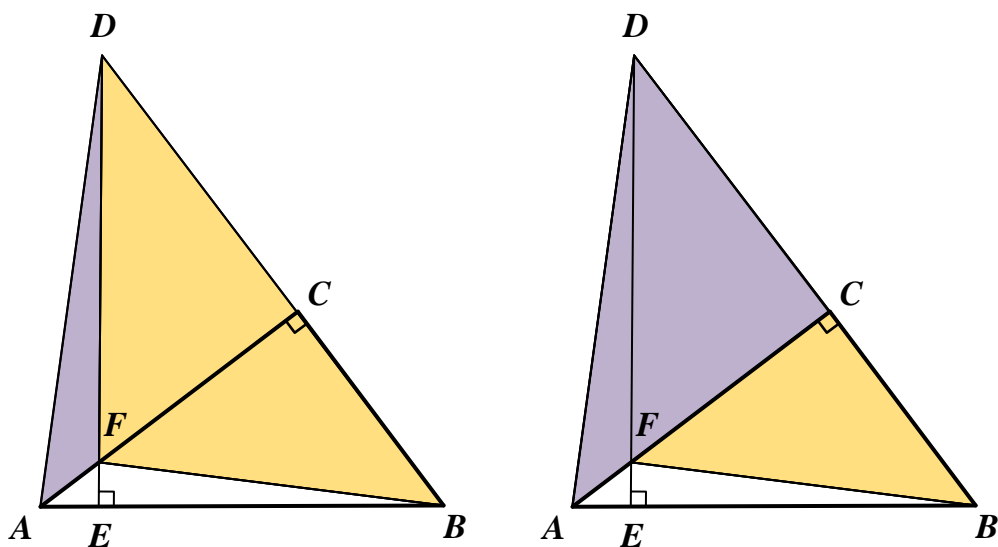
$$\triangle DFC \cong \triangle ABC \text{ (ASA 全等),}$$

推得

$$\overline{CF} = \overline{BC}, \overline{DF} = \overline{AB}.$$

2. 由於四邊形 $DAFB$ 面積可分割為兩種不同的三角形切割法，利用面積和相等關係，

即可推得勾股定理關係式：



[圖一]

[圖二]

由圖一可知：

$$\begin{aligned}
 \text{四邊形}DAFB &= \triangle DAF + \triangle DFB \\
 &= \frac{1}{2} \overline{DF} \times \overline{AE} + \frac{1}{2} \overline{DF} \times \overline{BE} \\
 &= \frac{1}{2} \overline{DF} \times (\overline{AE} + \overline{BE}) \\
 &= \frac{1}{2} \overline{DF} \times \overline{AB} \\
 &= \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{AB} \\
 &= \frac{1}{2} \overline{AB}^2,
 \end{aligned}$$

由圖二可知

$$\begin{aligned}
 \text{四邊形}DAFB &= \triangle FCB + \triangle DAC \\
 &= \frac{1}{2} \overline{BC} \times \overline{CF} + \frac{1}{2} \overline{CD} \times \overline{AC} \\
 &= \frac{1}{2} \overline{BC} \times \overline{BC} + \frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{AC} \\
 &= \frac{1}{2} \overline{BC}^2 + \frac{1}{2} \overline{AC}^2,
 \end{aligned}$$

由上述四邊形 $DAFB$ 的兩種表示法可推得：

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 76). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：利用直角三角形延伸出的新的圖形，可在拆解後算面積和時直接利用底和高來求得，且有兩種不同的切割方式，最後由面積相等關係而證得勾股定理關係式。另外，此證明透過代數證明的方式，可參考 A050 證明。

3. 評量：

| 國中 | 高中 | 教學 | 欣賞 | 美學 |
|----|----|----|----|----|
| ● | | ● | | |