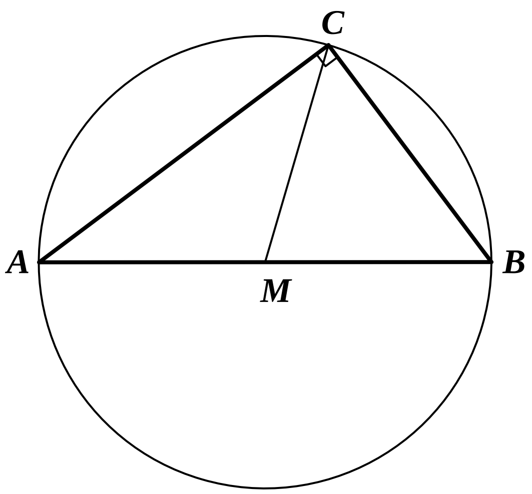
勾股定理證明-G232

【作輔助圖】

1. 取 $\overline{AB}$ 中點 M ，連接 $\overline{CM}$ 。

2. 以 M 點為圓心，$\overline{AM}$ 為半徑畫圓。



【求證過程】

在直角三角形中利用中線定理【註: 補充說明】及斜邊之中點到各頂點等距的外心性質，即可推得勾股定理關係式。

1. 首先利用中線定理，得到關係式：

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2\overline{CM}^2+2\overline{AM}^2.$$

2. 在直角三角形 ABC 中，因為 M 點為斜邊的中點，即三角形 ABC 的外心，所以 $\overline{CM}=\overline{AM}$ ，由第 1 點結論可進一步推得：

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2\overline{CM}^2+2\overline{AM}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{AM}^2=4\overline{AM}^2=4(\frac{\overline{AB}}{2})^2,$$

因此

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1746). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 89). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：此證明利用直角三角形之外心到各頂點等距的性質，代入中線定理而推得勾股定理關係式。

3. 評量：

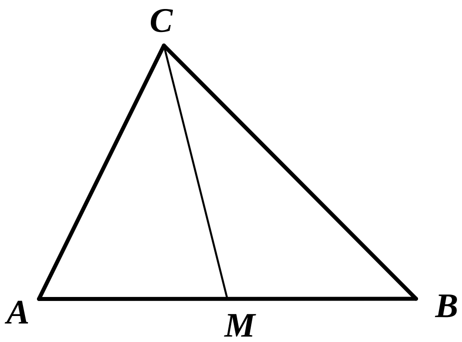
國中	高中	教學	欣賞	美學
	●	●		

4. 補充說明：

■ 中線定理：對於任意三角形 ABC 及 $\overline{AB}$ 邊上中點 M ，則有以下關係：

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2\overline{CM}^2+2\overline{AM}^2.$$

此定理亦稱阿波羅尼奧斯(Apollonios)定理，是歐氏幾何的定理，表述三角形兩邊和中線長度關係。它等價於平行四邊形定理恆等式，這裡我們由平行四邊形定理來證明。



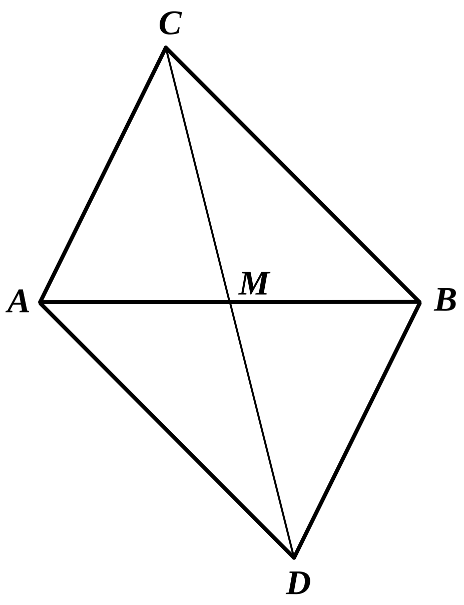
■ 平行四邊形恆等式：一個平行四邊形的兩條對角線長度的平方和，等於它四邊長度的平方和，即

$$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2$$

【證明過程】

平行四邊形 $ABCD$ ， M 為對角線的交點，由圖形可知 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$,

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$



因為 $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right|^2$

$$=\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}+\left|\overrightarrow{DB}\right|^2$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right|^2=\left|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right|^2$$

$$=\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{CD}\right|^2=\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+\left|\overrightarrow{DB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$$

$$=\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+\left|\overrightarrow{DB}\right|^2+\left|\overrightarrow{CB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$$

所以

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2.$$

因為 $\overline{AD}=\overline{BC},\ \overline{AC}=\overline{BD},$

則平行四邊形定理可整理成：

$$2\overline{AC}^2+2\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2.$$

又因為平行四邊形兩對角線互相平分，

所以上式可改寫成：

$$2\overline{AC}^2+2\overline{BC}^2=(2\overline{AM})^2+(2\overline{CM})^2,$$

而證得三角形中線定理：

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{CM}^2.$$