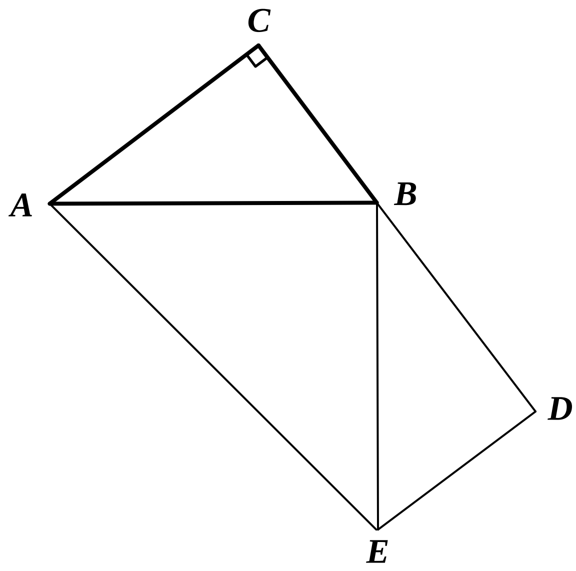
勾股定理證明-G231

【作輔助圖】

1. 將$\overline{CB}$延長至D點，使得$\overline{BD}=\overline{AC}$。

2. 從D點作的$\overline{AC}$的平行線，並在此線上取一點E，使得$\overline{DE}=\overline{BC}$。

3. 連接$\overline{BE}$及$\overline{AE}$。



【求證過程】

在直角三角形ABC外作一個全等三角形而形成梯形，梯形面積可表示為三塊直角三角形的面積和關係，即可推得勾股定理的關係式。

1. 首先說明三角形BED全等於三角形ABC：

   因為$\overline{DE}//\overline{AC}$，所以$\angle BDE=180^\circ-\angle ACB=180^\circ-90^\circ=90^\circ$，又因為

   $\overline{BD}=\overline{AC},\overline{DE}=\overline{BC}$及前述$\angle BDE=\angle ACB=90^\circ$，所以

   $$\Delta BED\cong\Delta ABC \text{ (SAS 全等).}$$

2. 由上述結論說明三角形ABE為等腰直角三角形：

   因為上述$\Delta BED\cong\Delta ABC$，所以$\overline{BE}=\overline{AB},$

   又因為$\angle ABE=180^\circ-\angle ABC-\angle DBE=180^\circ-\angle ABC-\angle CAB=\angle ACB=90^\circ,$

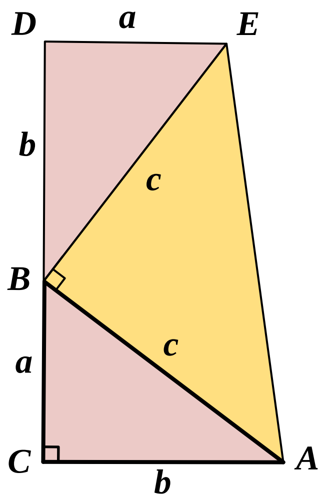
   所以三角形ABE為等腰直角三角形。

3. 由於梯形面積可分割為三個三角形，利用面積相等關係，即可推得勾股定理：
由圖形可知

$$梯形ACDE = \Delta ABC + \Delta ABE + \Delta BED,$$

因為 $\Delta BED \cong \Delta ABC$ ，所以上式可改為

$$梯形ACDE = 2\Delta ABC + \Delta ABE$$



$$\frac{1}{2}(\overline{DE}+\overline{AC})\times\overline{CD} = 2\cdot\frac{1}{2}(\overline{BC}\times\overline{AC})+\frac{1}{2}(\overline{AB}\times\overline{BE})$$

$$(\overline{DE}+\overline{AC})\times(\overline{CB}+\overline{BD}) = 2(\overline{BC}\times\overline{AC})+(\overline{AB}\times\overline{AB})$$

$$(a+b)\times(a+b) = 2ab+c^2$$

$$a^2+2ab+b^2 = 2ab+c^2$$

即推得

$$c^2 = a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於：美國第 20 任總統伽菲爾德（James Abram Garfield，西元 1831～1881 年）在做聯邦眾議員時（1876 年），曾給了一個圖形最簡單，用一點代數的證明於 1876 年 4 月 1 日在《新英格蘭教育日誌》（New England Journal of Education）上發表了他對畢氏定理的這一證法。伽菲爾德就任美國第二十任總統後來，人們為了紀念他對畢氏定理直觀、簡捷、易懂、明瞭的證明，就把這一證法稱為“總統”證法。
2. 心得：
   總統以一個直角梯形為例，上底假設為 a ，下底為 b，高為 $a+b$ 的直角梯形，其梯形面積等於一個腰長為 c 的等腰直角三角形和兩個直角邊為 a,b 的直角三角形的面積和，由面積的恆等式而推得勾股定理關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●

4. 總統巧證畢氏定理的故事：

美國第二十任總統伽菲爾德的證法在數學史上被傳為佳話。總統為什麼會想到去證明畢氏定理呢？難道他是數學家或數學愛好者？答案是否定的 。

事情的經過是這樣的 ，在 1876 年一個週末的傍晚，在美國首都華盛頓的郊外，有一位中年人正在散步，欣賞黃昏的美景，他就是當時美國俄亥俄州共和黨議員伽菲爾德。他走著走著，突然發現附近的一個小石凳上，有兩個小孩正在聚精會神地談論著什麼，時而大聲爭論，時而小聲探討。

由於好奇心驅使伽菲爾德循聲向兩個小孩走去，想搞清楚兩個小孩到底在幹什麼。只見一個小男孩正俯著身子用樹枝在地上畫著一個直角三角形。於是伽菲爾德便問他們在幹什麼？只見那個小男孩頭也不抬地說：“請問先生，如果直角三角形的兩條直角邊分別為 3 和 4，那麼斜邊長為多少呢？”伽菲爾德答到：“是 5 呀．”小男孩又問道：“如果兩條直角邊分別為 5 和 7，那麼這個直角三角形的斜邊長又是多少？”伽菲爾德不加思索地回答到：“那斜邊的平方一定等於 5 的平方加上 7 的平方 。”小男孩又說道：“先生，你能說出其中的道理嗎？”伽菲爾德一時語塞，無法解釋了，心理很不是滋味。

於是伽菲爾德不再散步，立即回家，潛心探討小男孩給他留下的難題。他經過反覆的思考與演算，終於弄清楚了其中的道理，並給出了簡潔的證明方法。

1876 年 4 月 1 日，伽菲爾德在《新英格蘭教育日誌》上發表了他對畢氏定理的這一證法。