勾股定理證明-G218

【作輔助圖】

1. 在圖一中以 $\overline{AB}$ 為邊長，向外作一正方形 $ABDE$。

2. 將 $\overline{CA}$ 延長至 F 點，使得 $\overline{AF}=\overline{BC}$。

3. 將 $\overline{CB}$ 延長至 G 點，使得 $\overline{BG}=\overline{AC}$。

4. 連接 $\overline{EF}$、$\overline{DG}$，並且將 $\overline{FE}$ 與 $\overline{GD}$ 延長交於 H 點。

5. 在圖二中將 $\overline{CA}$ 延長至 D 點，使得 $\overline{AD}=\overline{BC}$。

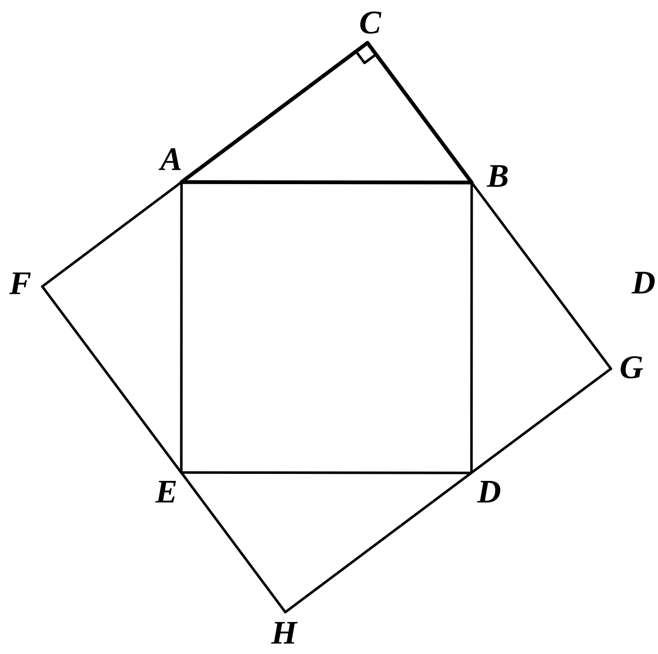
6. 將 $\overline{CB}$ 延長到 E 點，使得 $\overline{BE}=\overline{AC}$。

7. 以 $\overline{CD}$ 為邊長，作一正方形 $CDFE$。

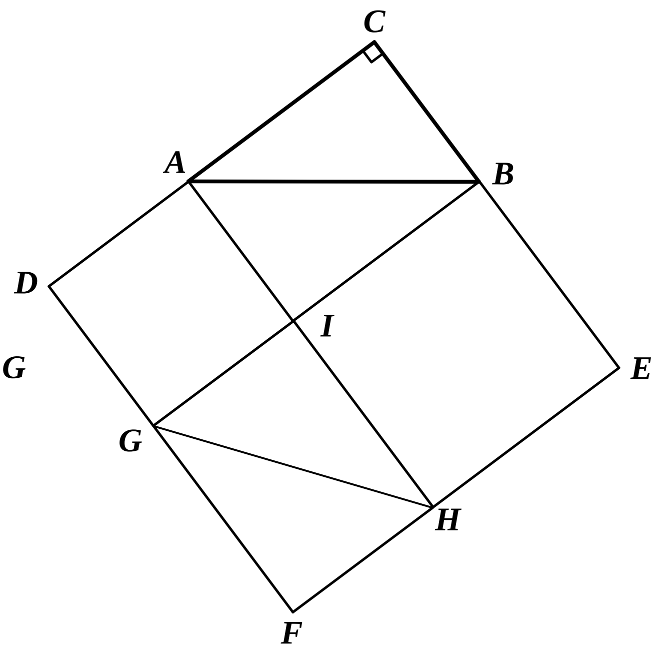
8. 從 A 點作 $\overline{CE}$ 的平行線，交 $\overline{EF}$ 於 H 點。

9. 從 B 點作 $\overline{CD}$ 的平行線，交 $\overline{AH}$ 於 I 點，交 $\overline{DF}$ 於 G 點。

10. 連接 $\overline{GH}$。



[圖一]



[圖二]

【求證過程】

用兩種不同作圖方式，作出兩個面積相等的大正方形，先說明圖中部分的三角形皆全等，利用等量原則分別將兩大正方形皆扣除四個直角三角形，比較兩式剩餘的面積，即可得勾股定理的關係式。

1. 首先證明圖一中三角形 EAF 、三角形 BDG 、三角形 DEH 與三角形 ABC 皆全等：

   因為 $\overline{AF}=\overline{BC},\overline{AE}=\overline{AB}$ ，且 $\angle FAE=90^\circ-\angle CAB=\angle ABC$ ，所以

   $$\Delta EAF\cong\Delta ABC\text{ (SAS 全等)},$$

   同理，亦可推得 $\Delta BDG\cong\Delta DEH\cong\Delta ABC$ (SAS 全等)，因此

   $$\Delta EAF\cong\Delta BDG\cong\Delta DEH\cong\Delta ABC.$$

2. 接著證明圖二中三角形 BAI 、三角形 GHF 、三角形 HGI 與三角形 ABC 皆全等：

   因為 $\overline{AI}//\overline{BC},\overline{BI}//\overline{CA}$ ，且 $\angle ACB=90^\circ$ ，所以 $ACBI$ 為矩形，故由

   $\overline{AI}=\overline{BC},\overline{BI}=\overline{AC},\overline{AB}=\overline{AB}$ ，可推得

   $$\Delta BAI\cong\Delta ABC\text{ (SSS 全等)},$$

   同理，因為 $\overline{IH}//\overline{GF},\overline{GI}//\overline{FH}$ ，且 $\angle GIH=90^\circ$ ，所以 $GIHF$ 為矩形，故由

   $\overline{IH}=\overline{GF},\overline{GI}=\overline{FH},\overline{GH}=\overline{GH}$ ，可推得

   $$\Delta GHF\cong\Delta GHI\text{ (SSS 全等)},$$

   又因為 $\overline{IH}=\overline{BE}=\overline{AC},\overline{GI}=\overline{AD}=\overline{BC},\angle HIG=\angle ACB=90^\circ$

   $$\Delta HGI\cong\Delta ABC\text{ (SAS 全等)},$$

   因此，由上述可知

   $$\Delta BAI\cong\Delta GHF\cong\Delta HGI\cong\Delta ABC.$$

3. 說明圖一中四邊形 $CFHG$ 為正方形：

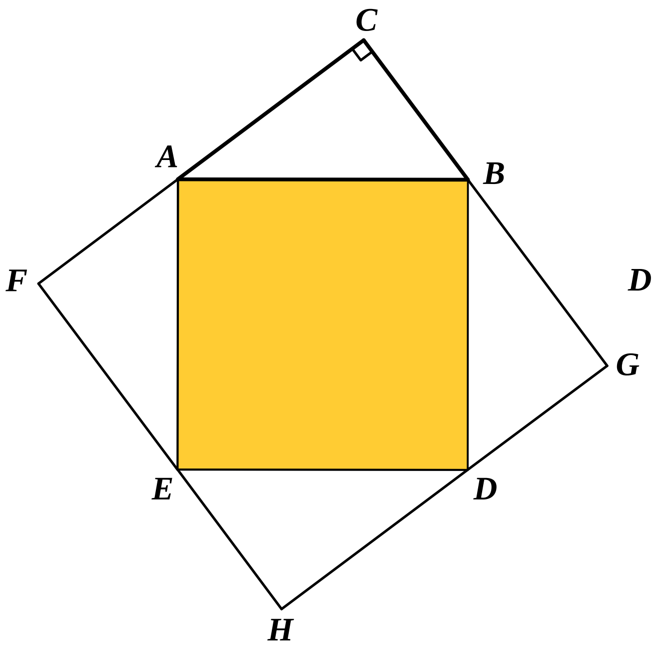
   由第 1 點結論可知 $\angle ACB=\angle EFA=\angle DHE=\angle BGD=90^\circ$，且 $\overline{CF}=\overline{AF}+\overline{AC}=\overline{BC}+$

   $\overline{BG}=\overline{CG}$ ，所以四邊形 $CFHG$ 為正方形，其邊長為 $\overline{BC}+\overline{AC}$ 。

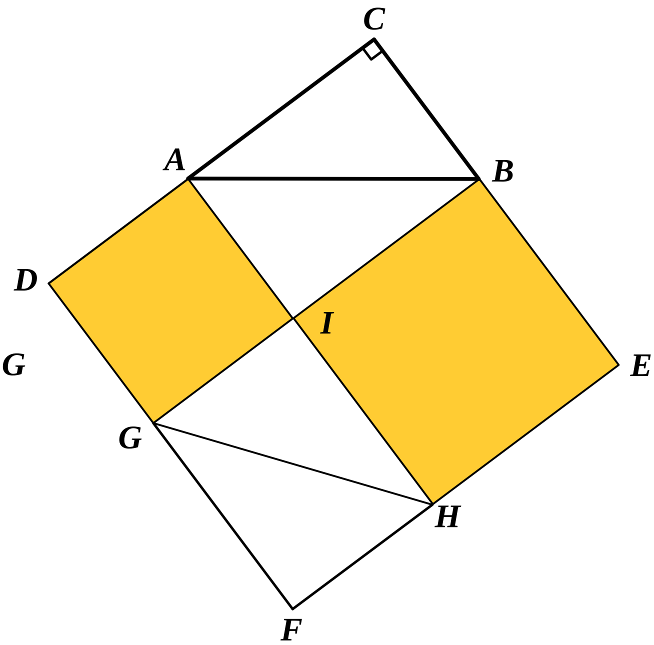
4. 說明圖二中四邊形 $ADGI$ 與四邊形 $BIHE$ 皆為正方形：

   因為四邊形 $CDGB$ 為一矩形，所以 $\overline{DG}=\overline{BC}=\overline{AD}$ ，推得四邊形 $ADGI$ 為正方形，

其邊長為$\overline{BC}$;同理，因為四邊形$CAHE$為一矩形，所以$\overline{HE}=\overline{AC}=\overline{BE}$，則四邊形$BIHE$為正方形，其邊長為$\overline{BC}$。



[圖 三]



[圖 四]

5. 在圖三及圖四中，分別皆將直角三角形ABC外圍的大正方形扣除四個全等的直角三角形面積，比較兩式剩餘的面積，即可推得勾股定理：

由圖三可得

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \square CFHG-(\Delta ABC+\Delta BDG+\Delta DEH+\Delta EAF)\\ &= \square CGHF-4\Delta ABC,\end{aligned}$$

由圖四可得

$$\begin{aligned}\square ADGI+\square BIHE &= \square CDFE-(\Delta ABC+\Delta BAI+GHF+\Delta HGI)\\ &= \square CDFE-4\Delta ABC,\end{aligned}$$

因為正方形$CFHG$與正方形$CDFE$邊長皆為$\overline{BC}+\overline{AC}$，所以面積相等，即

$$\square CGHF=\square CDFE,$$

利用等量原則，則

$$\square CGHF-4\Delta ABC=\square CDFE-4\Delta ABC$$
$$\square ABDE=\square ADGI+\square BIHE$$

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $ADGI$ 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 $BIHE$ 邊長為 $\overline{AC}$，所以可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

   Rev. A. D. Wheeler (1858). Note on the Proposition of Pythagoras, *Mathematical Monthly*, 1, 159.

2. 心得：

   (1) 利用兩種不同的作圖方式，作出相同的外圍大正方形，並皆切割掉四個全等的直角三角形，利用等量原則，則剩餘的正方形面積亦會相等。此證明以操作取代證明，透過拼湊出一個大正方形再拿掉四個直角三角形的過程，很快能讓學生體會勾股定理的意義。

   (2) 此證明透過代數證明的方式，可參考《勾股定理》的 A035。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	