勾股定理證明-G217

【作輔助圖】

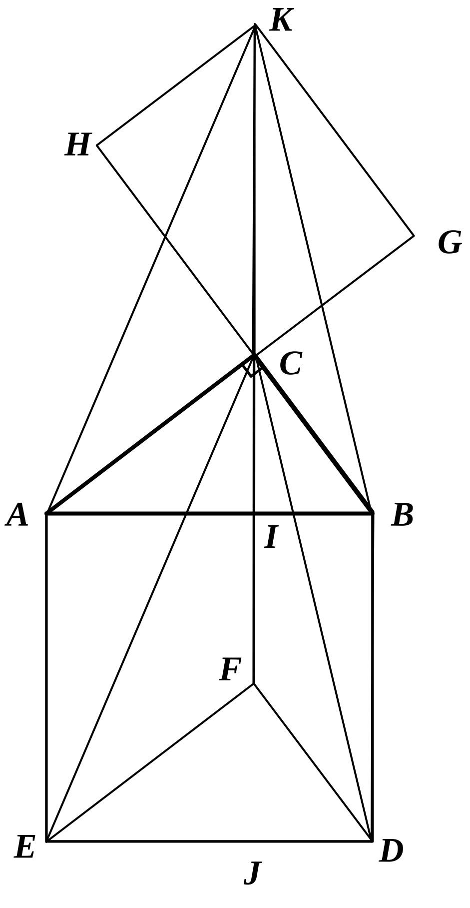
1. 以$\overline{AC}$為邊長，向外作一正方形$ABDE$。

2. 分別從D點作$\overline{BC}$的平行線，從E點作$\overline{AC}$的平行線，兩平行線交於F點。

3. 將$\overline{AC}$延長，取$\overline{CG}=\overline{BC}$，再將$\overline{BC}$延長，取$\overline{CH}=\overline{AC}$。

4. 分別從H點作$\overline{AG}$的平行線，從G點作$\overline{BH}$的平行線，兩平行線交於K點。

5. 連接$\overline{KC}$、$\overline{CF}$、$\overline{KA}$、$\overline{KB}$、$\overline{CE}$、$\overline{CD}$。



【求證過程】

將大正方形面積換算兩塊平行四邊形的面積和，先證明當中的平行四邊形及三角形全等關係，再利用全等性質得到邊長關係而計算出面積，即可推得勾股定理關係式。

1. 首先說明四邊形$CFDB$與四邊形$AEFC$皆為平行四邊形：

先證明三角形 EDF 與三角形 ABC 全等：因為 $\overline{EF}//\overline{AC}, \overline{ED}//\overline{AB}$ ，所以

$\angle FED = \angle CAB$ ，及 $\overline{DF}//\overline{BC}, \overline{ED}//\overline{AB}$ ，推得 $\angle FDE = \angle CBA$ ，又加上 $\overline{AB} = \overline{ED}$ ，所以

$$\Delta EDF \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等).}$$

推得

$$\overline{EF} = \overline{AC}, \overline{DF} = \overline{BC}.$$

由上述結論可知 $\overline{DF} = \overline{BC}$ ，又因為 $\overline{DF}//\overline{BC}$ ，所以四邊形 $CFDB$ 為平行四邊形。

同理，因為 $\overline{EF} = \overline{AC}, \overline{EF}//\overline{AC}$ ，所以四邊形 $AEFC$ 為平行四邊形。

2. 接著證明三角形 KCG 與三角形 ABC 全等，推得其邊長關係：

因為 $\overline{HK}//\overline{CG}, \overline{HC}//\overline{KG}, \angle HCG = \angle ACB = 90°$ ，所以四邊形 $CGKH$ 為矩形，可得

$\overline{GK} = \overline{CH} = \overline{AC}, \angle KGC = 90° = \angle ACB$ ，又因為 $\overline{CG} = \overline{BC}$ ，所以

$$\Delta KCG \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等),}$$

因此，推得

$$\overline{KC} = \overline{AB}.$$

3. 證明三角形 KCB 與三角形 CFD 全等，以及三角形 KCB 與三角形 CFD 全等：

由第 1 點結論可知 $CFDB$ 為平行四邊形，得 $\overline{CF} = \overline{BD}$ ，以及第 2 點結論可知 $\overline{KC} = \overline{AB}$ ，因此

$$\overline{KC} = \overline{AB} = \overline{BD} = \overline{CF}.$$

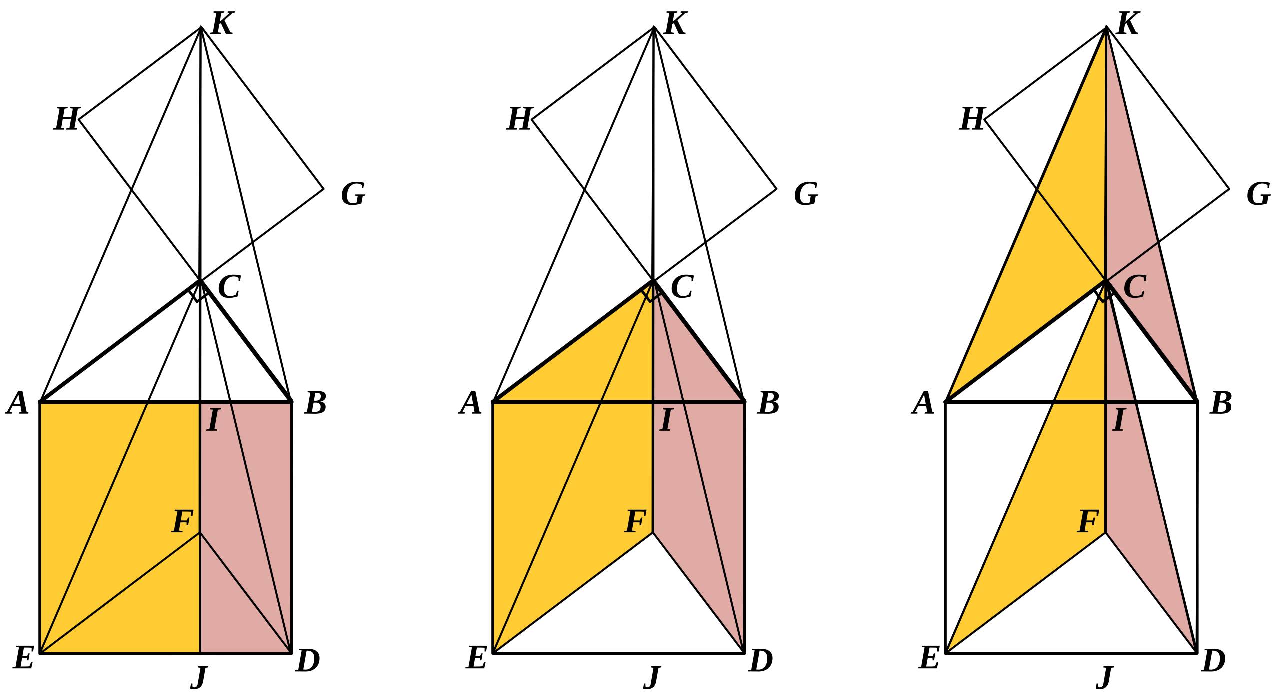
又因為 $\overline{BC}//\overline{DF}$ ，所以 $\angle KCB = \angle CFD, \overline{BC} = \overline{DF}$ ，加上上述結論 $\overline{KC} = \overline{CF}$ ，故推得

$$\Delta KCB \cong \Delta CFD \text{ (SAS 全等).}$$

同理，因為 $\overline{AC}//\overline{EF}$ ，所以 $\angle ACK = \angle EFC, \overline{AC} = \overline{EF}$ ，且 $\overline{KC} = \overline{CF}$ ，故推得

$$\Delta KCA \cong \Delta CFE \text{ (SAS 全等).}$$

4. 最後將大正方形面積換算成兩塊平行四邊形的面積和，運用三角形全等性質換算其面積，整理等式，即可推論得勾股定理的關係式：



由上圖及前述證明，計算正方形 $ABDE$ 的面積

$$
\begin{aligned}
\square ABDE &= \text{矩形}IJBD + \text{矩形}AEJI \\
&= \overline{BD}\times\overline{DJ} + \overline{AE}\times\overline{EF} \\
&= \text{▱}CFDB + \text{▱}AEFC \quad (\text{等底同高}) \\
&= 2\Delta CFD + 2\Delta CFE \\
&= 2\Delta KCB + 2\Delta KCA \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CG}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{CH}\right) \\
&= \overline{BC}\times\overline{BC} + \overline{AC}\times\overline{AC} \\
&= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,
\end{aligned}
$$

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，所以可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis)在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1926 年 3 月 26 日想到的。

2. 心得：此證明是將大正方形面積換算兩塊平行四邊形的面積和，為了求其面積，將圖形切割平移得以找到對應的底與高。其證明過程並不複雜，關鍵在一開始如何做輔助線利用全等性質得到邊長關係得以計算面積。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	