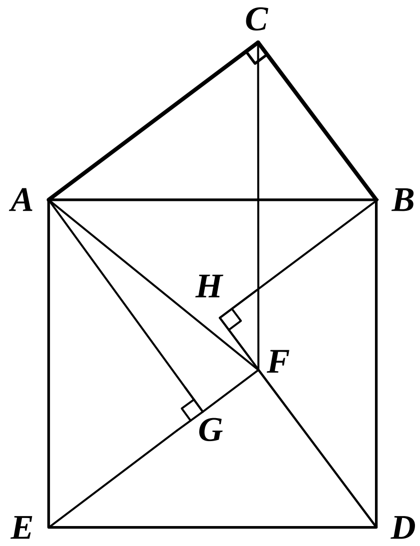
勾股定理證明-G216

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AC}$為邊長，向外作一正方形$ABDE$。
2. 分別從E點作$\overline{AC}$的平行線，從D點作$\overline{BC}$的平行線，兩平行線交於F點。
3. 從B點作$\overline{DF}$的垂線，交$\overrightarrow{DF}$於H點。
4. 從A點作$\overline{EF}$的垂線，交$\overline{EF}$於G點。
5. 連接$\overline{CF}$、$\overline{AF}$。



【求證過程】

利用做圖所產生的五邊形相等於兩平行四邊形與三角形的面積和，先證明圖中的三角形全等，推得其邊長關係，再利用五邊形面積切割掉一個三角形的面積後會等於斜邊上的正方形的面積，將等式整理，即可推得勾股定理關係式。

1. 首先證明三角形EDF與三角形ABC全等，推得其邊長與角度關係：

   因為$\overline{EF}//\overline{AC}, \overline{ED}//\overline{AB}$，所以$\angle FED=\angle CAB$，及因為$\overline{DF}//\overline{BC}, \overline{ED}//\overline{AB}$，所以

   $\angle FDE=\angle CBA$，又$\overline{AB}=\overline{ED}$，所以

   $$\Delta EDF \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等).}$$

   推得

   $$\overline{EF}=\overline{AC}, \overline{DF}=\overline{BC}, \angle EFD=\angle ACB=90°.$$

2. 利用上述證明，說明四邊形 $AEFC$ 及四邊形 $CFDB$ 為平行四邊形：

因為 $\overline{EF}\,//\,\overline{AC}$ 且 $\overline{EF}=\overline{AC}$ ，所以四邊形 $AEFC$ 為平行四邊形，

計算面積時，若以 $\overline{EF}$ 為底，則對應的高為 $\overline{AG}$ 。

因為 $\overline{DF}\,//\,\overline{BC}$ 且 $\overline{DF}=\overline{BC}$ ，所以四邊形 $CFDB$ 為平行四邊形，

計算面積時，其中 $\overline{DF}$ 為底時，則對應的高為 $\overline{BH}$ 。

3. 接著證明三角形 AEG 、三角形 DBH 與三角形 EDF 皆全等，推得其邊長關係：

因為 $\angle AGE=\angle EFD=90°,\angle AEG=90°-\angle FED=\angle EDF,\overline{AE}=\overline{ED}$ ，所以

$$\Delta AEG\cong\Delta EDF\ (\text{AAS 全等}).$$

同理，因為 $\angle DHB=\angle EFD=90°,\angle HDB=90°-\angle FDE=\angle FED,\overline{DB}=\overline{ED}$ ，所以

$$\Delta DBH\cong\Delta EDF\ (\text{AAS 全等})$$

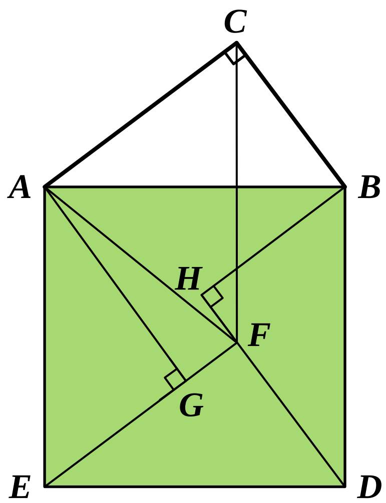
因此

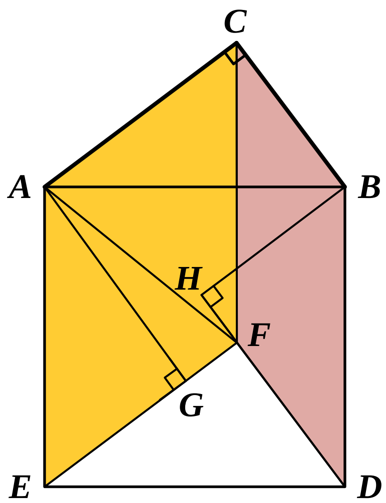
$$\Delta AEG\cong\Delta EDF\cong\Delta DBH.$$

可得

$$\overline{AG}=\overline{EF},\overline{BH}=\overline{DF}.$$

4. 由圖可知五邊形 $AEDBC$ 面積為兩平行四邊形與三角形的面積和，將五邊形面積減去三角形 ABC 的面積即可等於斜邊上的正方形的面積，整理並推得勾股定理：





由圖及上述證明可知

$$
\begin{aligned}
\square ABDE &= \text{五邊形 } AEDBC - \Delta ABC \\
&= \text{五邊形} AEDBC - \Delta EDF \\
&= (\square AEFC + \square CFDB + \Delta EDF) - \Delta EDF \\
&= \square AEFC + \square CFDB \\
&= \overline{EF} \times \overline{AG} + \overline{DF} \times \overline{BH} \\
&= \overline{EF} \times \overline{EF} + \overline{DF} \times \overline{DF} \\
&= \overline{EF}^2 + \overline{DF}^2 \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,
\end{aligned}
$$

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$ ，整理上式得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis)在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1900 年 8 月 4 日想到的。
2. 心得：此證明利用將五邊形切割成兩塊平行四邊形和原直角三角形，利用三角形全等性質推得邊長關係，由面積的恆等式而證得。此證明易懂，運用圖形的分割並計算面積即可推得勾股定理，很適合作為啟蒙的範例。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	