勾股定理證明-G213

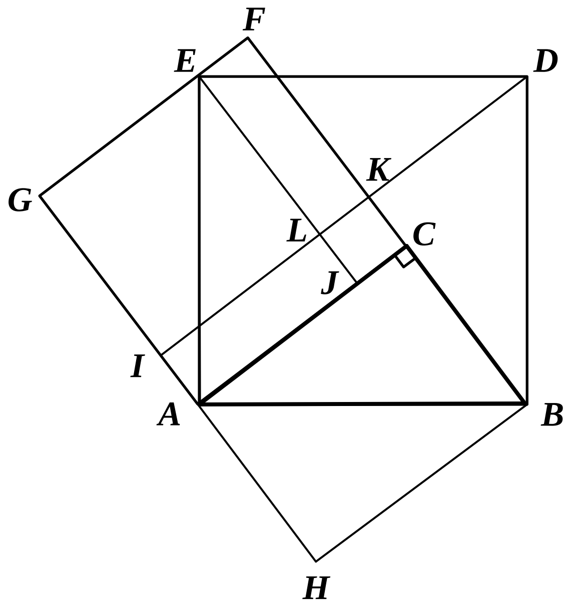
【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊長，向上作一正方形$ABDE$;以$\overline{AC}$為邊長，向外作一正方形$AGFC$。

2. 將$\overline{GA}$延長至H點，使得$\overline{AH}=\overline{CB}$，連接$\overline{BH}$。

3. 從D點作$\overline{AC}$的平行線，交$\overline{FC}$於K點，交$\overline{AG}$於I點。

4. 從E點作$\overline{FC}$的平行線，交$\overline{ID}$於L點，交$\overline{AC}$於J點。



【求證過程】

利用做輔助線所產生的圖形分割，先證明圖中的三角形皆全等，運用全等性質重新將正方形$ABDE$面積改寫，計算正方形$ABDE$的面積即可推得勾股定理關係式。

1. 首先證明三角形BDK、三角形DEL、三角形EAJ與三角形ABC皆全等：

因為$\overline{ID}//\overline{AC}$，所以$\angle BKD=\angle ACK=\angle ACB=90^\circ$，又$\angle KBD=90^\circ-\angle ABC=\angle CAB,$

$\overline{BD}=\overline{AB}$，所以

$$\Delta BDK\cong\Delta ABC\text{ (AAS 全等).}$$

因為$\overline{EJ}//\overline{FB}$，所以$\angle DLE=\angle DKF=\angle BKD=90^\circ$，又$\angle LDE=90^\circ-\angle KDB=\angle KBD$,

$\overline{DE}=\overline{BD}$，所以

$$\Delta DEL \cong \Delta BDK \text{ (AAS 全等).}$$

因為 $\overline{EJ}\,//\,\overline{FB}$，所以 $\angle EJA = \angle ACB = 90°$，又 $\angle EAJ = 90° - \angle CAB = \angle ABC$，$\overline{EA} = \overline{AB}$，所以

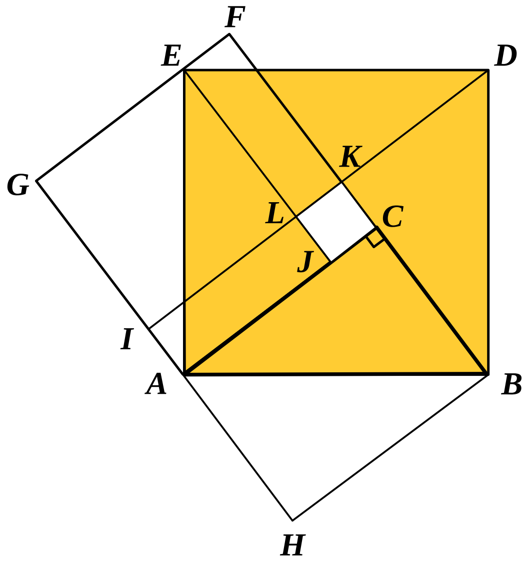
$$\Delta EAJ \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等).}$$

因此，由上述可得

$$\Delta BDK \cong \Delta DEL \cong \Delta EAJ \cong \Delta ABC.$$

2. 由圖可知正方形 *ABDE* 被分割成四個全等的三角形及中間一小正方形，運用全等性質則面積相等改寫正方形 *ABDE* 面積：

   由第 1 點結論推得 $\overline{BK} = \overline{AC}, \overline{AJ} = \overline{BC}$



$$\begin{aligned}
\square ABDE &= \Delta ABC + \Delta BDK + \Delta DEL + \Delta EAJ + \square CKLJ \\
&= 4 \times \Delta ABC + \overline{CJ} \times \overline{CK} \\
&= 4 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BC}\right) + (\overline{AC} - \overline{AJ}) \times (\overline{BK} - \overline{BC}) \\
&= 2\overline{AC} \times \overline{BC} + (\overline{AC} - \overline{BC}) \times (\overline{AC} - \overline{BC}) \\
&= 2\overline{AC} \times \overline{BC} + (\overline{AC} - \overline{BC})^2
\end{aligned}$$

3. 整理第 2 點結果，找出直角三角形 *ABC* 三邊長關係，即可推得勾股定理關係式：

   將 $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c$ 代入第 2 點的結果，可得

$$\begin{aligned}
\square ABDE &= 2\overline{AC} \times \overline{BC} + (\overline{AC} - \overline{BC})^2 \\
c^2 &= 2ab + (\mathrm{b} - a)^2 \\
c^2 &= 2ab + \mathrm{b}^2 - 2ab + a^2 \\
c^2 &= b^2 + a^2
\end{aligned}$$

   即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis)在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在

1926 年 3 月想到的。

另外，可參考 Arthur R. Colburn (1910). The Pons Asinorum I— New solution of the Pythagorean Theorem, *Scientific American Supplement*, *70*, 383.的證明。在對照後，魯米斯(E.S. Loomis)的證明為取代其中切割後用數字代表面積的部分。

2. 心得：此證明沒有太多步驟，僅運用到三角形間全等的性質來換算大正形面積，即可找出直角三角形 ABC 三邊長關係。若於教學使用，很適合作為啟蒙的範例。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	