勾股定理證明-G209

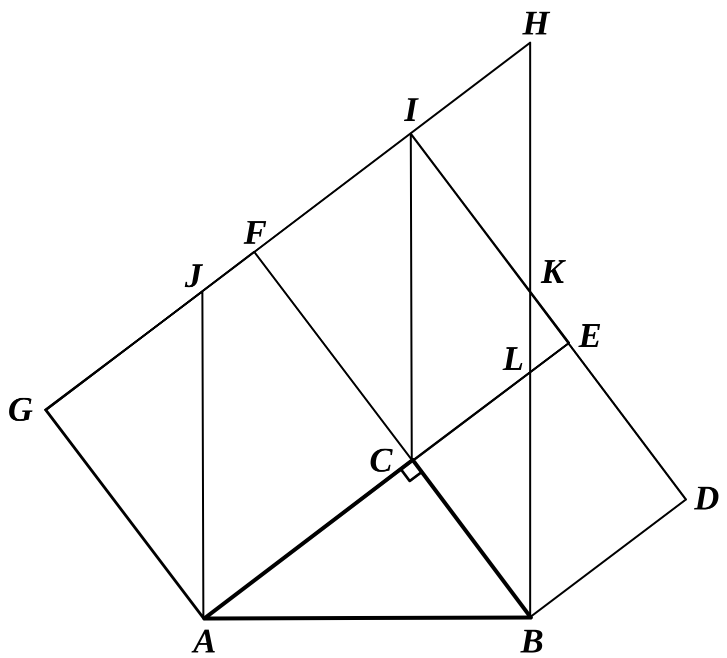
【作輔助圖】

1. 以 $\overline{BC}$ 為邊長，向外作一正方形 $CBDE$；以 $\overline{AC}$ 為邊長，向外作一正方形 $AGFC$。

2. 將 $\overline{GF}$ 延長，從 B 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{GF}$ 的延長線於 H 點。

3. 將 $\overline{DE}$ 延長，交 $\overline{BH}$ 於 K 點，交 $\overline{GH}$ 於 I 點，並連接 $\overline{IC}$。

4. 從 A 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{GF}$ 於 J 點。



【求證過程】

將兩股邊上的正方形面積相加，先利用全等性質證明其邊長關係，再藉由圖形間等底同高則面積相等的性質推得兩股邊上的正方形面積和等於斜邊長的平方，即可得勾股定理關係式。

1. 首先證明三角形 AJG 與三角形 ABC 全等，推得其邊長關係：

   因為 $\overline{AJ} \perp \overline{AB}$，所以 $\angle GAJ = 90° - \angle JAC = \angle CAB$，

   且因為 $\overline{AG} = \overline{AC}, \angle AGJ = \angle ACB = 90°$，所以

   $$\Delta AJG \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等)}.$$

   故可推得 $\overline{AJ} = \overline{AB}.$

2. 運用等底同高來說明平行四邊形$CBKI$與平行四邊形$CLHI$面積相等：

因為$\overline{IE}//\overline{FC},\overline{FI}//\overline{CE},\angle FCE=\angle ACB=90°$，所以四邊形$CEIF$為矩形，推得

$\overline{IE}=\overline{FC}$，因此，由$\overline{IE}=\overline{FC}=\overline{AC},\overline{CE}=\overline{BC},\angle IEC=\angle ACB=90°$，可推得

$$\Delta ICE\cong\Delta ABC\text{ (SAS 全等).}$$

故可知$\angle ICE=\angle ABC.$

因為第 1 點可知$\angle AJG=\angle ABC$，以及$\overline{FI}//\overline{CE}$，所以$\angle FIC=\angle ICE$

綜合上述，可得

$$\angle FIC=\angle ICE=\angle ABC=\angle AJG.$$

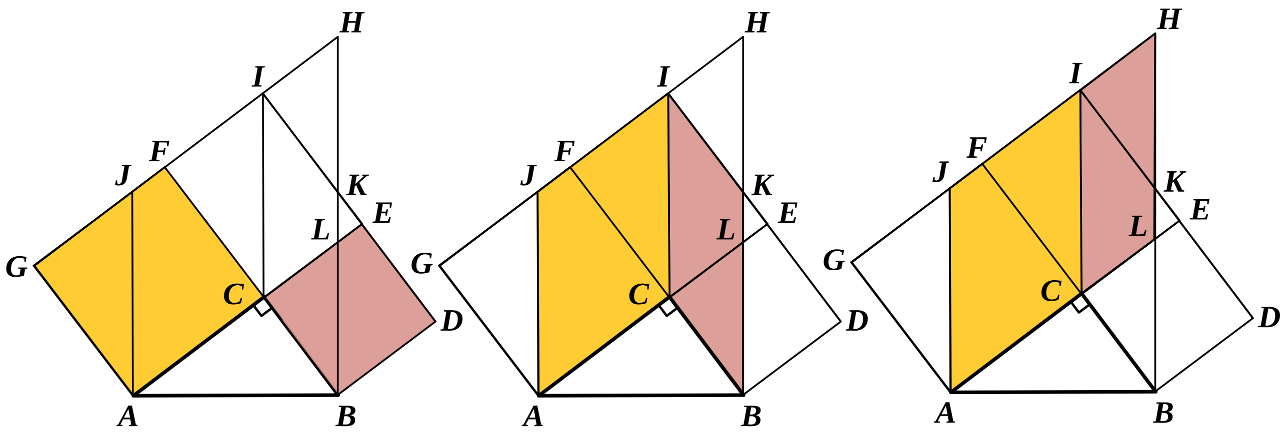
因為$\angle FIC=\angle AJG$可推得$\overline{JA}//\overline{IC}$，又$\overline{JA}\perp\overline{AB},\overline{HB}\perp\overline{AB}$，可知$\overline{JA}//\overline{HB}$，所以

$$\overline{IC}//\overline{HB}.$$

因此，在平行四邊形$CBKI$和平行四邊形$CLHI$中，因為$\overline{IC}$與$\overline{HB}$平行，以$\overline{IC}$為底，其高相等，所以

$$▱CBKI\text{面積}=▱CLHI\text{面積}..$$

3. 將兩股邊上的正方形面積相加，由等底同高則面積相等的性質推論出等於一個平行四邊形面積，計算其面積，即可推得勾股定理：



由上圖及利用前述證明

$$\begin{aligned}\square CBDE+\square AGFC&=\overline{BC}\times\overline{CE}+\overline{AC}\times\overline{CF}\\&=▱CBKI+▱ACIJ\\&=▱CLHI+▱ACIJ\\&=▱ALHJ\\&=\overline{AJ}\times\overline{AB}\end{aligned}$$

$$\square CBDE + \square AGFC = \overline{AB} \times \overline{AB}$$

因為正方形 $AGFC$ 邊長為 $\overline{AC}$ ，正方形 $CBDE$ 邊長為 $\overline{BC}$ ，所以可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis)在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1926 年 3 月 20 日想到的。
2. 心得：此證明是依 G088 證明修改得證的，此證明沒有太多步驟，主要也僅用到圖形間等底同高的面積關係來作證明，可引導學生去發現其中的圖形關係。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	