勾股定理證明-G106

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{BC}$ 為邊長，向外作一正方形 $CBDE$；以 $\overline{AC}$ 為邊長，向內作一正方形 $AGFC$；

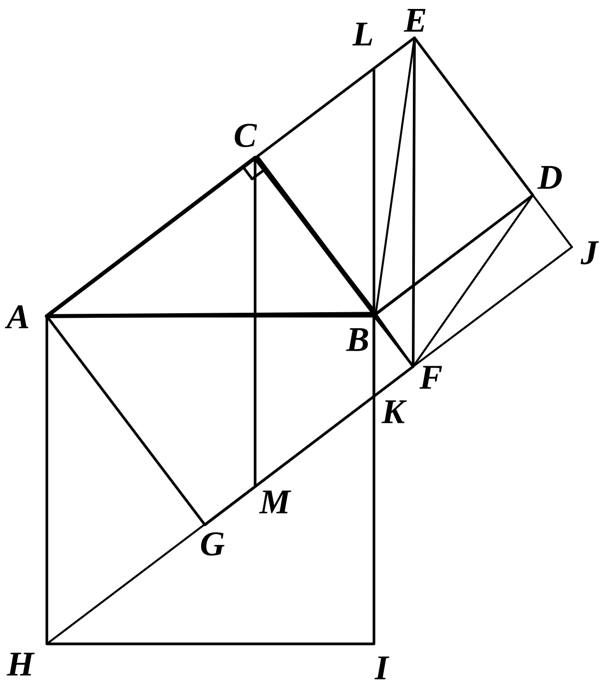
   以 $\overline{AB}$ 為邊長，向外作一正方形 $AHIB$。

2. 將 $\overline{GF}$ 延長至 J 點，使得 $\overline{FJ}=\overline{BD}$，並且連接 $\overline{DJ}$。

3. 將 $\overline{BI}$ 延長，交 $\overline{CE}$ 於 L 點。

4. 從 C 點作 $\overline{AH}$ 的平行線，交 $\overline{GF}$ 於 M 點。

5. 連接 $\overline{GH}$、$\overline{FD}$、$\overline{FE}$、$\overline{BE}$。



【求證過程】

將大正方形面積換算成兩塊平行四邊形的面積和，先證明切割後為平行四邊形及面積的等價關係，利用面積之間的割補，可推出勾股定理關係式。

1. 首先證明圖中 $H-G-F$ 三點共線，說明 $AHKL$ 為平行四邊形：
   先證明三角形 AHG 與三角形 ABC 全等，

   因為 $\angle GAH = 90^\circ - \angle KAG = \angle CAB$，且 $\overline{AH}=\overline{AB}, \overline{AG}=\overline{AC}$，所以

$$\Delta AHG \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

由此可知，$\angle AGH = \angle ACB = 90°$，又$\angle AGF = 90°$，可推得$H - G - F$共線。

因此$\overline{HK} // \overline{AL}$，又因為$\overline{AH} // \overline{LK}$，所以$AHKL$為平行四邊形。

2. 運用等底同高則面積相等的性質說明平行四邊形$LKFE$與矩形$BFJD$面積的關係：

因為$\overline{GJ} // \overline{AE} // \overline{BD}$，得$\overline{FJ} // \overline{BD}$，且$\overline{FJ} = \overline{BD}$，$\angle DBF = 90°$，所以四邊形$BFJD$為矩形，且$\angle BDJ = 90°$，又$\angle BDE = 90°$，可推得$E - D - J$共線。

由上述，可得知因為$\overline{EJ} = \overline{AG}, \angle EJF = \angle AGH = 90°, \overline{FJ} = \overline{BD} = \overline{BC} = \overline{HG}$，所以

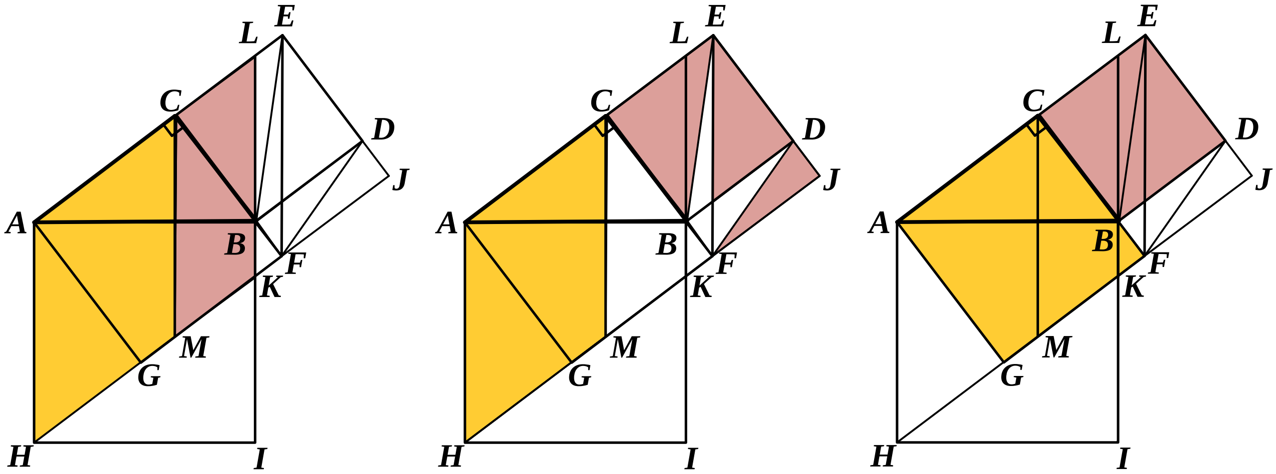
$$\Delta EJF \cong \Delta AGH \text{ (SAS 全等)},$$

可推得$\overline{EF} = \overline{AH}, \angle EFJ = \angle AHG$，加上$\overline{AH} // \overline{LK}$，故可得$\angle EFJ = \angle AHG = \angle LKF$，

因為$\overline{EF} // \overline{LK}$，且$\overline{EF} = \overline{AH} = \overline{LK}$，所以四邊形$LKFE$為平行四邊形。因此

$$\square LKFE = 2\Delta EBF = 2\left(\frac{1}{2} \times \overline{BF} \times \overline{CE}\right) = 2\Delta DBF = \square BFJD.$$

3. 將大正方形面積換算成兩塊平行四邊形的面積和，其中一塊平行四邊形面積藉由等底同高則面積相等的性質，推論出三個正方形面積的等價關係，而推得勾股定理：



由上圖及利用前述證明

$$
\begin{aligned}
\square\ AHIB &= \text{▱}AHKL \\
&= \text{▱}CMKL + \text{▱}AHMC \\
&= (\text{▱}CMFE - \text{▱}LKFE) + \text{▱}AHMC \\
&= (\overline{CE} \times \overline{CF} - 2\Delta EBF) + \overline{AC} \times \overline{AG} \\
&= \left(\text{▭}CFJE - 2\Delta DBF\right) + \square\ AGFC \\
\square\ AHIB &= \left(\text{▭}CFJE - \text{▭}BFJD\right) + \square\ AGFC \\
&= \square\ CBDE + \square\ AGFC,
\end{aligned}
$$

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$，正方形 $CBHI$ 邊長為 $\overline{BC}$ ，所以可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Benj. F. Yanney and James. A.(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly, 4*(11), 268.
2. 心得：此證明與 G103 的想法相似，同樣是將大正方形面積換算兩塊平行四邊形的面積和，運用等底同高則面積相等的性質推得。透過圖形進行面積割補很快可以了解到三個正方形面積的等價關係。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	