勾股定理證明-G105

【作輔助圖】

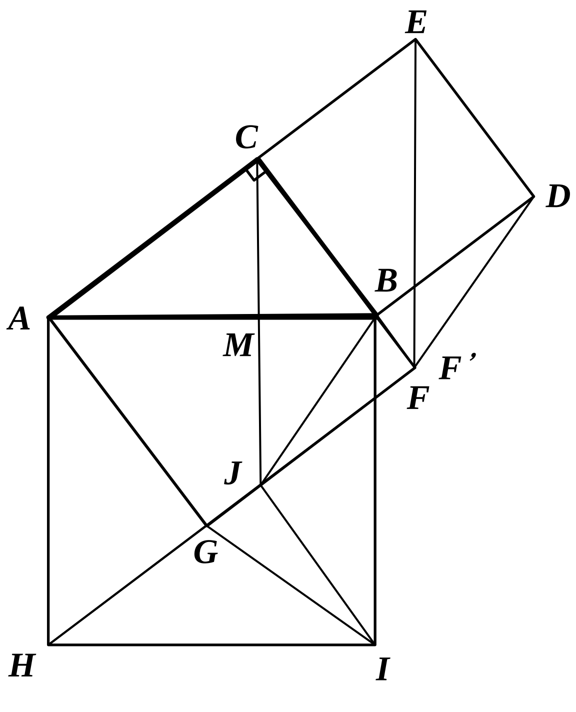
1. 以 $\overline{BC}$ 為邊長，向外作一正方形 $CBDE$；以 $\overline{AC}$ 為邊長，向內作一正方形 $AGFC$；

   以 $\overline{AB}$ 為邊長，向外作一正方形 $AHIB$ 。

2. 從 C 點作 $\overline{AH}$ 的平行線，交 $\overline{GF}$ 於 J 點。

3. 從 E 點作 $\overline{AH}$ 的平行線，交 $\overline{GF}$ 的延長線於 F' 點，使得 $\overline{EF'}$ 平行於 $\overline{AH}$ 。

4. 連接 $\overline{HG}$ 、 $\overline{IJ}$ 、 $\overline{IG}$ 、 $\overline{BJ}$ 、 $\overline{FD}$ 。



【求證過程】

用作圖將大正方形分割成五個區塊，逐一證明分割後的三角形與較小的兩個正方形中的三角形面積相等關係，利用面積重新拼湊，而得到三個正方形面積的等價關係，即可推出勾股定理的關係式。

1. 首先說明 F' 點與 F 點重和：

   因為 $\overline{CE} // \overline{JF'}, \overline{CJ} // \overline{EF'}$ ，所以四邊形 $CJF'E$ 為平行四邊形，故可得

$$\overline{JF'} = \overline{CE} = \overline{BC}.$$

又因為$\overline{CJ}//\overline{AH}$，得$\angle AMC=\angle ABI=90^\circ$，所以$\angle FCJ=\angle ACB-\angle ACM$

$=\angle AMC-\angle ACM=\angle CAB$，又因為$\overline{CF}=\overline{AC},\angle CFJ=\angle ACB=90^\circ$，所以

$\Delta CJF\cong\Delta ABC$ (ASA 全等)，故可推得

$$\overline{JF}=\overline{BC}.$$

由上述可知，$\overline{JF'}=\overline{BC}=\overline{JF}$，且於$F'$點在$\overline{GF}$的延長線上，故$F'$點與$F$點重和。

2. 證明圖一中三角形AHG與三角形ABC全等，並推論出$H-G-F$三點共線：

因為$\angle GAH=\angle BAH-\angle BAG=\angle CAG-\angle BAG=\angle CAB$，且$\overline{AH}=\overline{AB},\overline{AG}=\overline{AC}$，所以

$$\Delta AHG\cong\Delta ABC\text{(SAS 全等)},$$

由此可知，$\angle AGH=\angle ACB=90^\circ$又$\angle AGF=90^\circ$，可推得

$$H-G-F\text{ 共線。}$$

3. 證明三角形HIJ與三角形ABC全等，推得其邊長與角度關係：

由第 1 點結論$H-G-F$共線，可知$\overline{HJ}//\overline{AC}$，且$\overline{AH}//\overline{CJ}$，所以四邊形$AHJC$為平行四邊形，故可得$\overline{HJ}=\overline{AC}.$又因為$\overline{HJ}//\overline{AC},\overline{HI}//\overline{AB}$，所以$\angle JHI=\angle CAB.$

綜合上述可知 $\overline{HJ}=\overline{AC},\angle JHI=\angle CAB$，又加上$\overline{HI}=\overline{AB}$，所以

$$\Delta HIJ\cong\Delta ABC\text{(SAS 全等)},$$

因此，可推得

$$\overline{IJ}=\overline{BC},\angle HJI=\angle ACB=90^\circ.$$

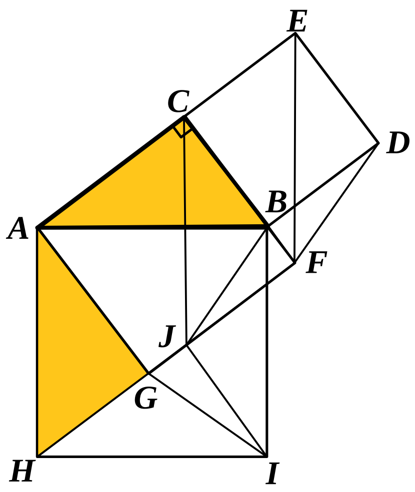
4. 接著證明圖二中三角形GIJ與三角形BJF全等：

由第 1、2 點可知$\overline{HG}=\overline{BC},\overline{HJ}=\overline{AC}$，則$\overline{GJ}=\overline{HJ}-\overline{HG}=\overline{AC}-\overline{BC}=\overline{CF}-\overline{BC}=\overline{BF}.$

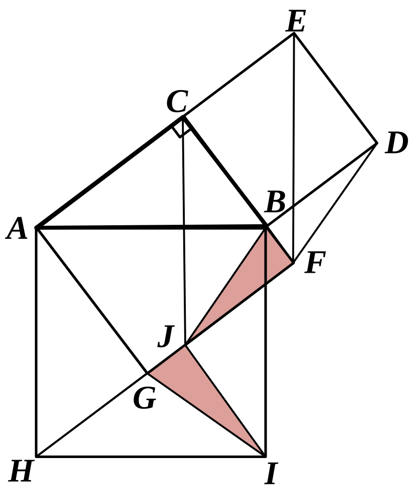
又因為$\overline{IJ}=\overline{BC}$，且$\overline{JF}=\overline{GF}-\overline{GJ}=\overline{AC}-\left(\overline{AC}-\overline{BC}\right)=\overline{BC}$，所以$\overline{IJ}=\overline{JF}.$

綜合上述可知$\overline{GJ}=\overline{BF},\overline{IJ}=\overline{JF}$，又加上$\angle GJI=\angle BFJ=90^\circ$，所以

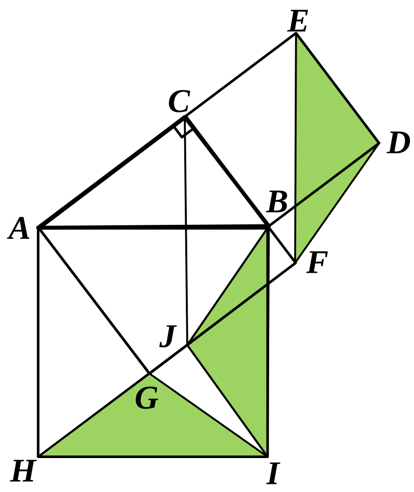
$$\Delta GIJ\cong\Delta BJF\text{(SAS 全等)}.$$



[圖 一]



[圖 二]



[圖 三]

5. 運用等底同高則面積相等的性質說明圖三中三角形 HIG 與三角形 BJI 皆與三角形 EFD 面積相等：

由第 1、2 點可知 $\overline{HG}=\overline{BC}, \overline{IJ}=\overline{BC}$，又 $\overline{JF}=\overline{IJ}$，則

$$\Delta HIG\text{面積}=\frac{1}{2}\times\overline{HG}\times\overline{IJ}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{BC},$$

由第 3 點可知 $\overline{IJ}=\overline{BC}, \angle HJI=\angle ACB=90^{\circ}$，得 $\overline{IJ}//\overline{BC}$，可推得四邊形 $CJIB$ 為平行四邊形，因此

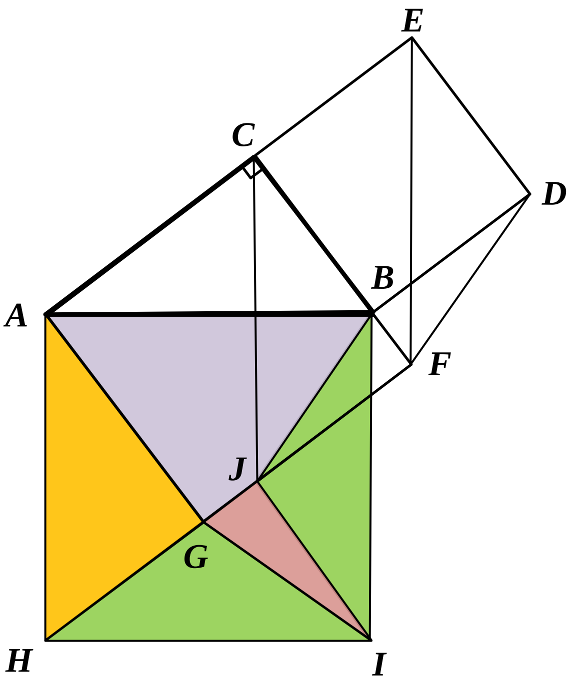
$$\Delta BJI\text{面積}=\frac{1}{2}\text{▱}CJIB\text{面積}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{JF}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{BC},$$

又因為

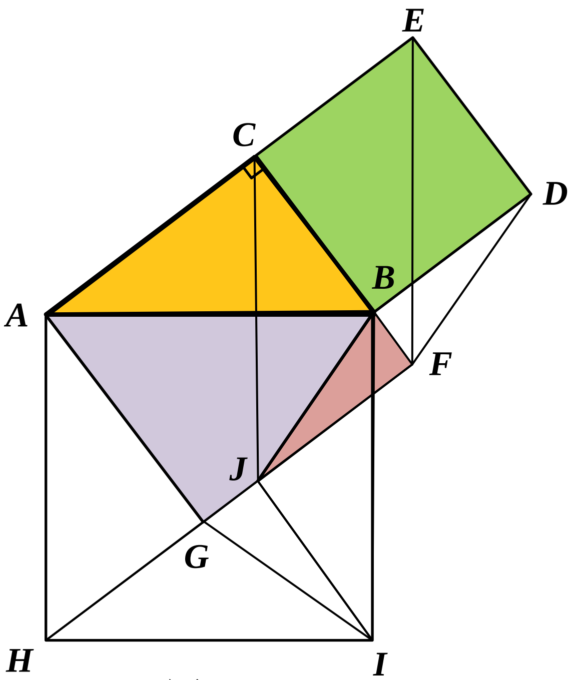
$$\Delta EFD\text{面積}=\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\square\, CBDE\text{面積},$$

因此，可得

$$\Delta HIG\text{面積}=\Delta BJI\text{面積}=\Delta EFD\text{面積}=\frac{1}{2}\square\, CBDE\text{面積}.$$



[圖 四]



[圖 五]

6. 最後由圖四可知正方形 $AHIB$ 被分割成五個區塊，利用前述證明將正方形 $AHIB$ 面積重新拼湊得到圖五，並推論出三個正方形面積的等價關係，即可得勾股定理：
因為

$$
\begin{aligned}
\square\, AHIB &= \text{四邊形}AGJB + \Delta AHG + \Delta GIJ + \Delta HIG + \Delta BJI \\
&= \left(\text{四邊形}AGJB + \Delta ABC + \Delta BJF\right) + \Delta EFD + \frac{1}{2}\square CJIB \\
&= (\text{四邊形}AGJB + \Delta ABC + \Delta BJF) + (\Delta EFD + \Delta EFD) \\
&= \square\, AGFC + \square\, CBDE
\end{aligned}
$$

因為正方形 $AHIB$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $AGFC$ 邊長為 $\overline{AC}$，正方形 $CBDE$ 邊長為 $\overline{BC}$ ，

所以可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

Benj. F. Yanney and James. A.(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly, 4*(11), 268.

2. 心得：

此證明是將大正方形面積做切割，逐一證明分割後的三角形與較小的兩個正方形中的三角形面積相等關係，除了利用全等性質外，在部分三角形需要運用等底同高性質才能求得面積相等，因此，無法完全用割補動作求證。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	