勾股定理證明-G104

【作輔助圖】

1. 以$\overline{BC}$為邊長，向外作一正方形$CBDE$；以$\overline{AC}$為邊長，向內作一正方形$AGFC$；

   以$\overline{AB}$為邊長，向外作一正方形$AHIB$。

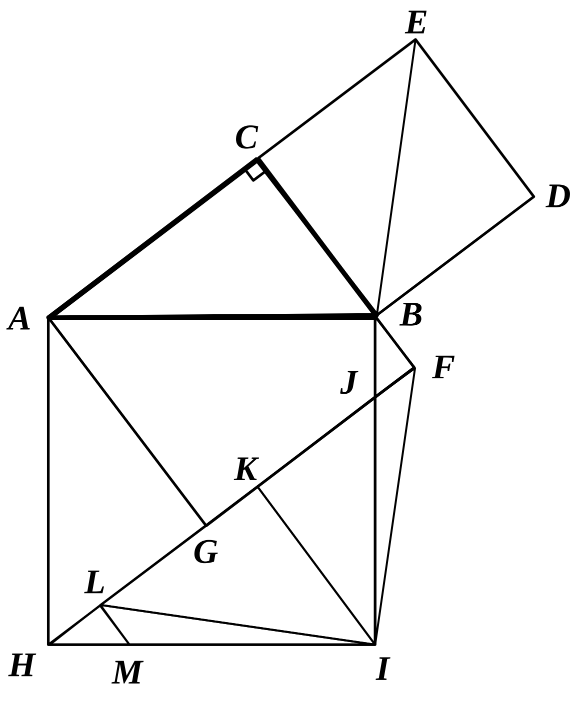
2. 連接$\overline{HG}$。

3. 從I點作$\overline{BC}$的平行線，交$\overline{GF}$於K點。

4. 在$\overline{KH}$上取一點L，使得$\overline{KL}=\overline{BC}$。

5. 從L點作$\overline{BC}$的平行線，交$\overline{HI}$於M點。

6. 連接$\overline{LI}$、$\overline{FI}$、$\overline{BE}$。



【求證過程】

運用作圖將大正方形分割成六個區塊，找出這些分割後的三角形全等關係，並逐一證明之，利用圖形之間的割補進而求得三個正方形面積的等價關係，即可推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明圖一中三角形AHG與三角形ABC全等，並推論出$H-G-F$三點共線：

因為$\angle GAH=\angle BAH-\angle BAG=\angle CAG-\angle BAG=\angle CAB$，且$\overline{AH}=\overline{AB},\overline{AG}=\overline{AC}$，所以

$$\Delta AHG\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}),$$

由此可知，$\angle AGH=\angle ACB=90^\circ$又$\angle AGF=90^\circ$，可推得

$$H-G-F\ \text{共線。}$$

2. 證明三角形HIK與三角形ABC全等，推得其邊長關係：
   由第 1 點可知$\angle GAH=\angle CAB$，則$\angle KHI=\angle AHI-\angle AHG=\angle GAH=\angle CAB.$

   因為$\overline{IK}\,//\,\overline{CF}$，所以$\angle HKI=\angle KFB=\angle ACB=90^\circ.$

   由上述可知$\angle KHI=\angle CAB,\angle HKI=\angle ACB$,且因為$\overline{HI}=\overline{AB}$，所以

   $$\Delta HIK\cong\Delta ABC\ (\text{AAS 全等}),$$

   因此，可推得

   $$\overline{HK}=\overline{AC},\overline{IK}=\overline{BC}.$$

3. 接著證明圖二中三角形HML與三角形BJF全等：

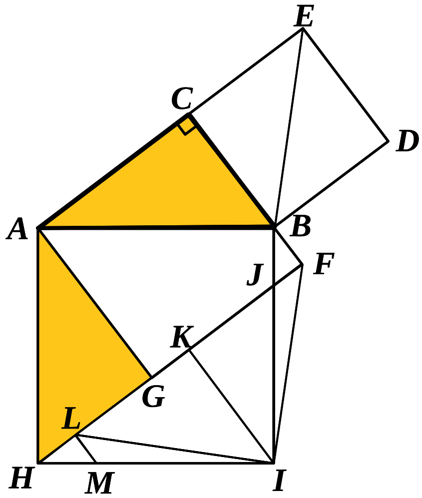
   由上述可知$\overline{HK}=\overline{AC}$，且因為$\overline{KL}=\overline{BC}$，所以$\overline{HL}=\overline{HK}-\overline{KL}=\overline{AC}-\overline{BC}=\overline{CF}-\overline{BC}$

   $=\overline{BF}$.因為$\angle LHM=\angle CAB$，所以$\angle FBJ=180^\circ-\angle ABJ-\angle ABC=180^\circ-90^\circ-\angle ABC$

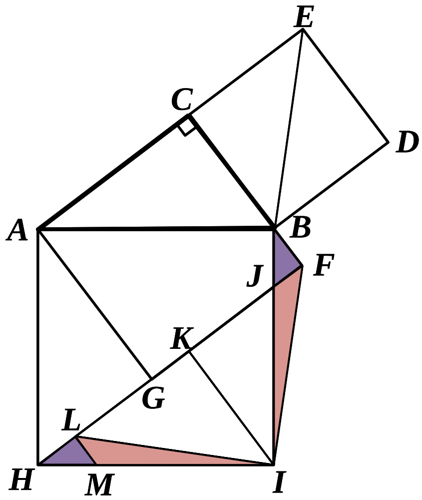
   $=\angle CAB=\angle LHM$，又因為$\overline{LM}\,//\,\overline{BC}$，所以$\angle HLM=\angle BFJ=90^\circ.$

   綜合上述可知 $\angle LHM=\angle FBJ,\angle HLM=\angle BFJ$及$\overline{HL}=\overline{BF}$，所以

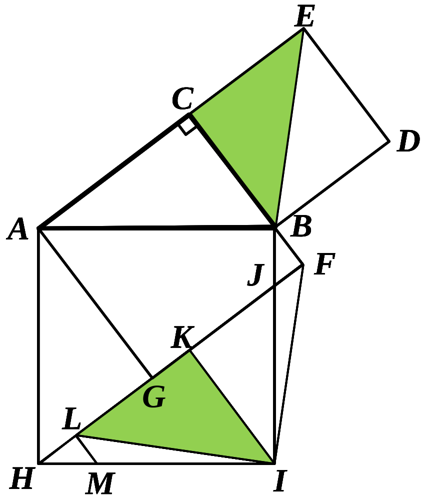
   $$\Delta HML\cong\Delta BJF\ (\text{AAS 全等}).$$



[圖 一]



[圖 二]



[圖 三]

4. 先證明圖二中三角形 LHI 與三角形 FBI 全等，進一步推得三角形 LMI 與三角形 FJI 全等：

由上述可知 $\overline{HL}=\overline{BF}, \angle LHI=\angle FBI$ ，且 $\overline{HI}=\overline{BI}$ ，所以

$$\Delta LHI \cong \Delta FBI \text{ (SAS 全等)},$$

故可推得 $\overline{LI}=\overline{FI}$.

又因為第 3 點結論 $\Delta HML \cong \Delta BJF$ ，可知 $\overline{LM}=\overline{FJ}, \overline{HM}=\overline{BJ}$ ，則 $\overline{MI}=\overline{HI}-\overline{HM}$

$=\overline{BI}-\overline{BJ}=\overline{JI}$ ，因此，由上述 $\overline{LI}=\overline{FI}, \overline{LM}=\overline{FJ}, \overline{MI}=\overline{JI}$ ，所以

$$\Delta LMI \cong \Delta FJI \text{ (SSS 全等)}.$$

5. 證明圖三中三角形 LKI 與三角形 BCE 全等：

由第 2 點結論可知 $\overline{KI}=\overline{BC}=\overline{CE}$ ，及 $\angle LKI=\angle ACB=90°=\angle BCE$ ，且 $\overline{KL}=\overline{BC}$ ，所以

$$\Delta LKI \cong \Delta BCE \text{ (SAS 全等)}.$$

又可知三角形 LKI 為等腰直角三角形。

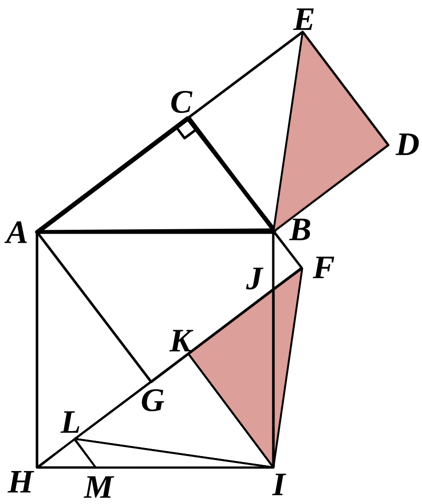
6. 證明圖四中三角形 FKI 與三角形 BDE 全等：

由第 4 點結論可知 $\angle JFI=\angle MLI$ ，且因為 $\angle MLI=180^\circ-\angle HLM-\angle KLI$

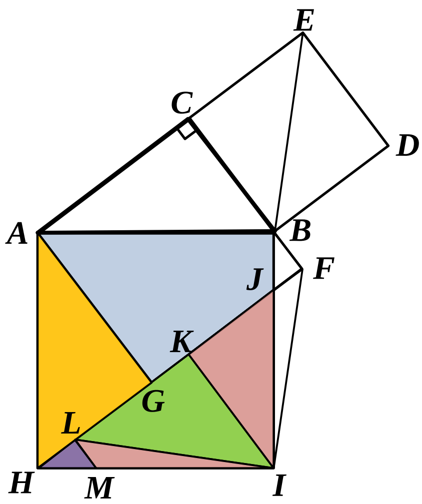
$=180^\circ-90^\circ-45^\circ=45^\circ$ ，所以 $\angle JFI=\angle MLI=45^\circ=\angle DBE$.

因此，由上述可得 $\angle KFI = \angle DBE$ ，又因為 $\overline{KI} = \overline{BC} = \overline{DE}, \angle FKI = \angle LKI = 90^\circ$ $= \angle BDE$ ，所以

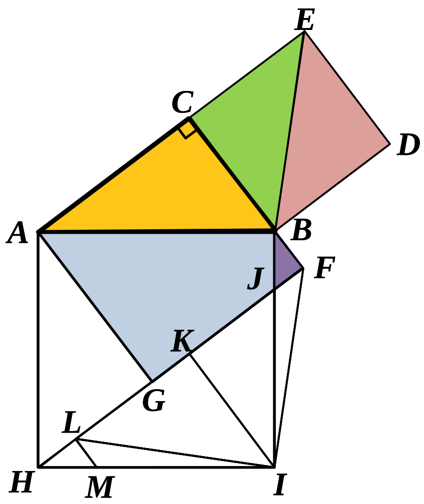
$$\Delta FKI \cong \Delta BDE \text{(AAS 全等).}$$



[圖 四]



[圖 五]



[圖 六]

7. 最後由圖五可知正方形 $AHIB$ 被分割成六個區塊，利用前述證明將正方形 $AHIB$ 重新拼湊得到圖六，並推論出三個正方形面積的等價關係，即可得勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\square\, AHIB &= \text{四邊形}AGJB + \Delta AHG + \Delta HML + \Delta LKI + \Delta LMI + \Delta IJK \\
&= \text{四邊形}AGJB + \Delta ABC + \Delta BJF + \Delta BCE + \left(\Delta FJI + \Delta IJK\right) \\
&= \left(\text{四邊形}AGJB + \Delta ABC + \Delta BJF\right) + \Delta BCE + \Delta FKI \\
&= \square\, AGFC + \left(\Delta BCE + \Delta BDE\right) \\
&= \square\, AGFC + \square\, CBDE,
\end{aligned}$$

因為正方形 $AHIB$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $AGFC$ 邊長為 $\overline{AC}$，正方形 $CBDE$ 邊長為 $\overline{BC}$ ，所以可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

Benj. F. Yanney and James. A.(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, *4*(11), 269.

2. 心得：此證明是將大正方形面積做切割，將分割後的三角形部分移動到以兩股為邊長的正方形上，因此可得到三個正方形面積的等價關係，學生若將圖形割補運用拼圖方式，以操作取代證明則較能體會勾股定理的意義。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	