勾股定理證明-G103

【作輔助圖】

1. 以$\overline{BC}$為邊長，向外作一正方形$CBDE$；以$\overline{AC}$為邊長，向內作一正方形$AGFC$；

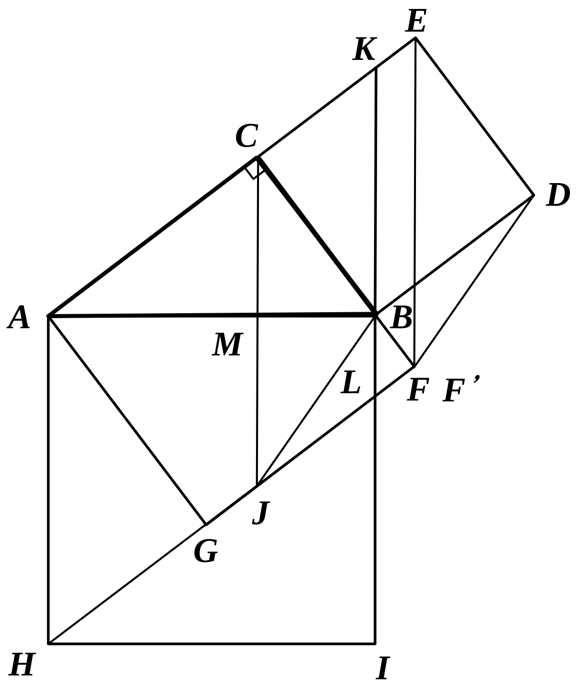
   以$\overline{AB}$為邊長，向外作一正方形$AHIB$。

2. 將$\overline{IB}$延長，交$\overline{CE}$於K點。

3. 從C點作$\overline{KI}$的平行線，交$\overline{AB}$於M點，交$\overline{GF}$於J點。

4. 從E點作$\overline{CJ}$的平行線，交$\overline{GF}$的延長線於F'點，使得$\overline{EF'}$平行於$\overline{CJ}$。

5. 連接$\overline{BJ}$、$\overline{DF}$、$\overline{HG}$。



【求證過程】

將大正方形面積換算成兩塊平行四邊形的面積和，如上述作圖過程，先證明當中的三角形全等關係及平行四邊形，而計算出面積，即可推得勾股定理關係式。

1. 首先說明F'點與F點重和：

   因為$\overline{CE}//\overline{JF'},\overline{CJ}//\overline{EF'}$，所以四邊形$CJF'E$為平行四邊形，故可得

$$\overline{JF'}=\overline{CE}=\overline{BC}.$$

又因為$\overline{CJ}//\overline{BI}$，得$\angle AMC=\angle ABI=90^\circ$，所以$\angle FCJ=\angle ACB-\angle ACM$

$=\angle AMC-\angle ACM=\angle CAB$，又因為$\overline{CF}=\overline{AC},\angle CFJ=\angle ACB=90^\circ$，所以

$\Delta CJF\cong\Delta ABC$ (ASA 全等)，故可得

$$\overline{JF}=\overline{BC}.$$

由上述可知，$\overline{JF'}=\overline{BC}=\overline{JF}$，且於$F'$點在$\overline{GF}$的延長線上，故$F'$點與$F$點重和。

2. 接著證明三角形CJB與三角形EFD全等：

   因為F'點與F點重和，所以四邊形$CJFE$為平行四邊形，推得$\overline{CJ}=\overline{EF}.$

   又因為$\overline{CJ}//\overline{EF}$，所以$\angle ACJ=\angle CEF$ (同位角相等)，推得

   $$\angle BCJ=\angle ACF-\angle ACJ=\angle CED-\angle CEF=\angle DEF.$$

   由上述可知，因為$\overline{CJ}=\overline{EF},\angle BCJ=\angle DEF,\overline{CB}=\overline{ED}$，所以

   $$\Delta CJB\cong\Delta EFD\text{ (SAS 全等)}.$$

3. 證明圖中$H-G-F$三點共線，說明$AHJC$為平行四邊形：
   先證明三角形AHG與三角形ABC全等，

   因為$\angle GAH=90^\circ-\angle KAG=\angle CAB$，且$\overline{AH}=\overline{AB},\overline{AG}=\overline{AC}$，所以

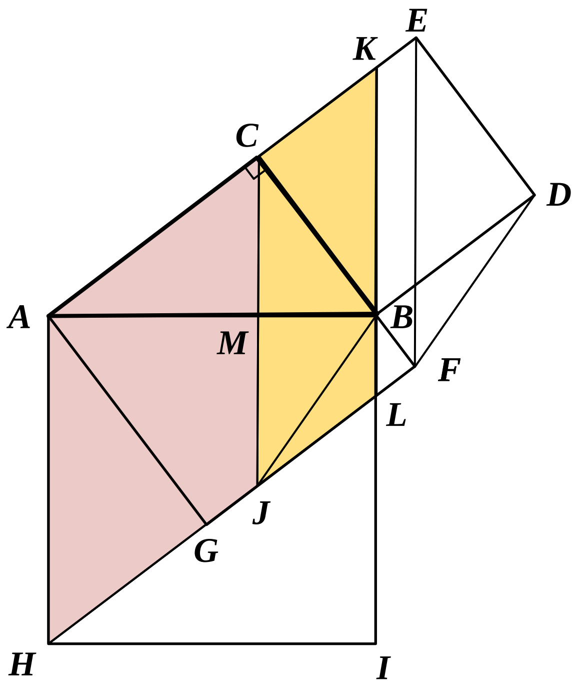
   $$\Delta AHG\cong\Delta ABC\text{ (SAS 全等)},$$

   由此可知，$\angle AGH=\angle ACB=90^\circ$且因為$\angle AGF=90^\circ$，所以

   $$H-G-F\text{ 共線。}$$

   因此$\overline{HJ}//\overline{AC}$，又因為$\overline{AH}//\overline{CJ}$，所以$AHJC$為平行四邊形。

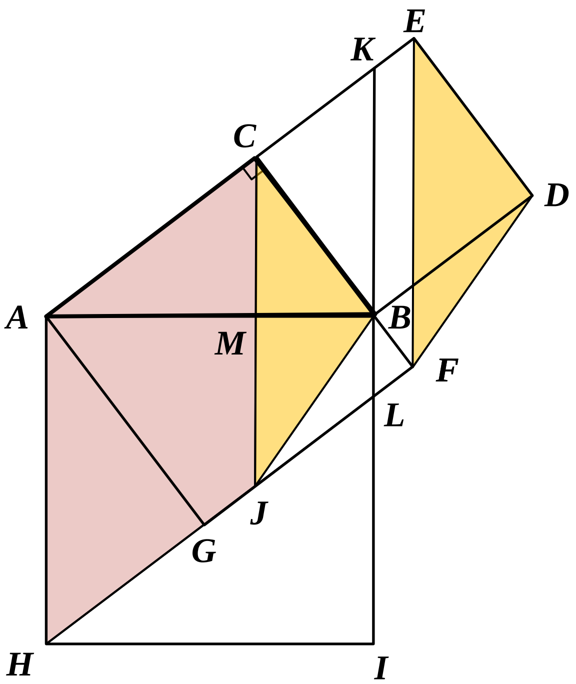
4. 最後將大正方形面積換算成兩塊平行四邊形的面積和，其中一塊平行四邊形面積再藉由第 1 點結論求得其面積表示式，進而推得勾股定理的關係式：



由圖可知：

$$
\begin{aligned}
\square AHIB &= \text{▱}AHLK \\
&= \text{▱}CJLK + \text{▱}AHJC \\
&= \overline{CJ} \times \overline{BM} + \overline{AC} \times \overline{AG} \\
&= 2\Delta CJB + \overline{AC} \times \overline{AG}
\end{aligned}
$$

由第 1、2 點結論，可知 $\Delta CJB \cong \Delta EFD$ 及 $AHJC$ 為平行四邊形，進一步整理



$$
\begin{aligned}
\square AHIB &= 2\Delta CJB + \overline{AC} \times \overline{AG} \\
&= 2\Delta EFD + \overline{AC} \times \overline{AC} \\
&= 2\left(\frac{\overline{ED} \times \overline{BD}}{2}\right) + \overline{AC} \times \overline{AC} \\
&= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2
\end{aligned}
$$

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$ ，故可得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Benj. F. Yanney and James. A.(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly, 4*(11), 269.
2. 心得：此證明是將大正方形面積換算兩塊平行四邊形的面積和，為了求其面積，將圖形切割平移得以找到對應的底與高。了解其證明過程並不複雜，關鍵在一開始如何建立一個全等的三角形計算面積這部分。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	