勾股定理證明-G102

【作輔助圖】

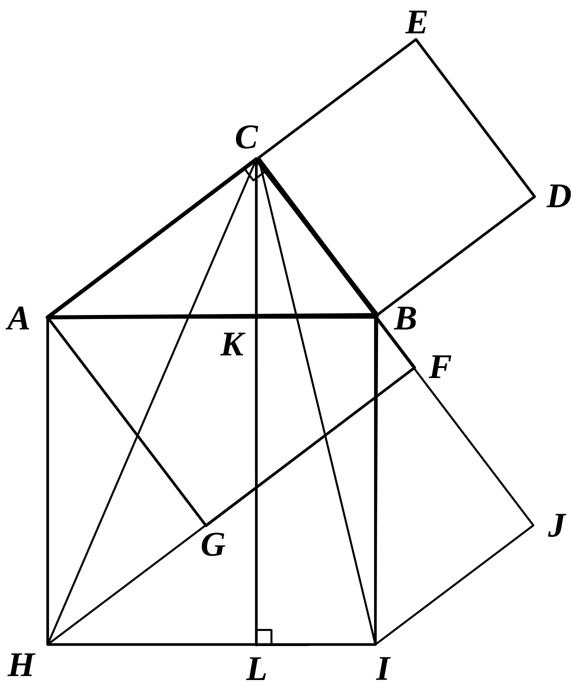
1. 以 $\overline{BC}$ 為邊長，向外作一正方形 $CBDE$；以 $\overline{AC}$ 為邊長，向內作一正方形 $AGFC$；

   以 $\overline{AB}$ 為邊長，向外作一正方形 $AHIB$。

2. 將 $\overline{CB}$ 延長至 J 點，使得 $\overline{BJ}=\overline{AC}$，連接 $\overline{IJ}$。

3. 從 C 點作 $\overline{HI}$ 的垂線，交 $\overline{HI}$ 於 L 點，交 $\overline{AB}$ 於 K 點。

4. 連接 $\overline{CH}$、$\overline{CI}$、$\overline{HG}$。



【求證過程】

上述輔助圖透過從 C 點作 $\overline{HI}$ 的垂線將大正方形分割成兩部分，找出和這些分割區塊面積相等的三角形關係，利用三角形不同的底與高來表示三角形面積，可推出勾股定理關係式。

1. 首先證明三角形 BIJ 與三角形 ABC 全等，推得其邊長關係：

   因為 $\angle JBI=180^{\circ}-\angle ABI-\angle CBA=180^{\circ}-90^{\circ}-\angle CBA=\angle CAB$，且 $\overline{BJ}=\overline{AC}$,

   $\overline{BI}=\overline{AB}$，所以

$$\Delta BIJ \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

因此推得

$$\overline{IJ} = \overline{BC}.$$

2. 接著證明三角形 AHG 與三角形 ABC 全等，並推論出圖中 $H-G-F$ 三點共線：

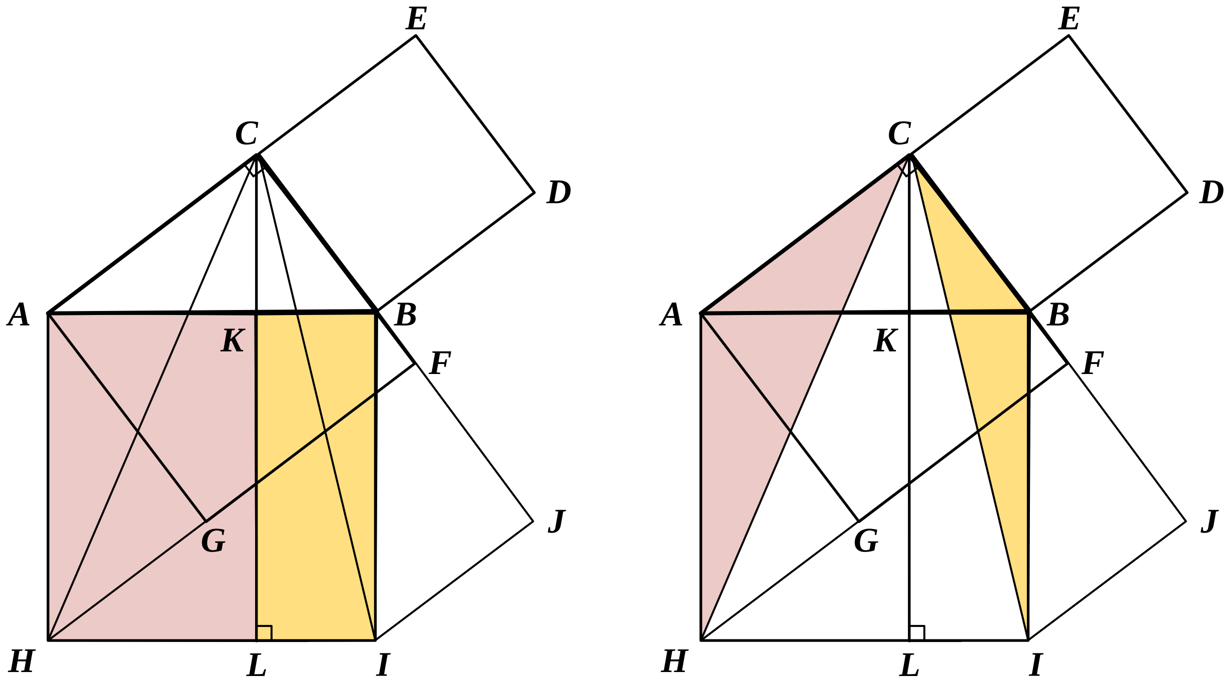
因為 $\angle GAH = 90^\circ - \angle KAG = \angle CAB$ ，且 $\overline{AH} = \overline{AB}$, $\overline{AG} = \overline{AC}$ ，所以

$$\Delta AHG \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

由此可知， $\angle AGH = \angle ACB = 90^\circ$ 又 $\angle AGF = 90^\circ$ ，可推得

$$H-G-F \text{ 共線。}$$

3. 將大正方形切割換算成由輔助線建立的兩個三角形面積和的兩倍：



由上圖及第 1 點結論，可知 $\overline{IJ} = \overline{BC}$ ，則

$$\begin{aligned}
\square AHIB &= \square KLIB + \square AHLK \\
&= \overline{BI} \times \overline{LI} + \overline{AH} \times \overline{HL} \\
&= 2\left(\frac{\overline{BI} \times \overline{LI}}{2}\right) + 2\left(\frac{\overline{AH} \times \overline{HL}}{2}\right) \\
&= 2\Delta CBI + 2\Delta CAH.
\end{aligned}$$

4. 最後利用三角形不同的底與高表示三角形面積，進而推得勾股定理的關係式：

因為在三角形 CBI 中若以 $\overline{BC}$ 為底，則高為 $\overline{IJ}$ ；在三角形 CAH 中若以 $\overline{AC}$ 為底，且

由第 2 點可知 $H-G-F$ 共線，則高為 $\overline{CF}$ 。因此將第 3 點結論以不同的底與高來表示三角形面積，則

$$\begin{aligned}\square\, AHIB &= 2\Delta CBI + 2\Delta CAH \\ &= 2\left(\frac{\overline{BC}\times\overline{IJ}}{2}\right)+2\left(\frac{\overline{AC}\times\overline{CF}}{2}\right) \\ &= \overline{BC}\times\overline{IJ}+\overline{AC}\times\overline{CF}\end{aligned}$$

又因為由第 1 點結論可知 $\overline{IJ}=\overline{BC}$ ，及 $\overline{CF}=\overline{AC}$ 代入

$$\square\, AHIB = \overline{BC}\times\overline{BC}+\overline{AC}\times\overline{AC},$$

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$,故可得

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   Edwards, George C. (1895). *Elements of Geometry* (p.161). New York : Macmillan and co.
2. 心得：此證明是將大正方形切割成兩塊矩形，其切割後的矩形面積換算成由輔助線建立的三角形，並利用圖形不同的底對應到不同的高而求得等式關係，其過程不複雜，只要能證明由輔助線建立的三角形的底和高邊長關係，很容易就可以推出結論。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	