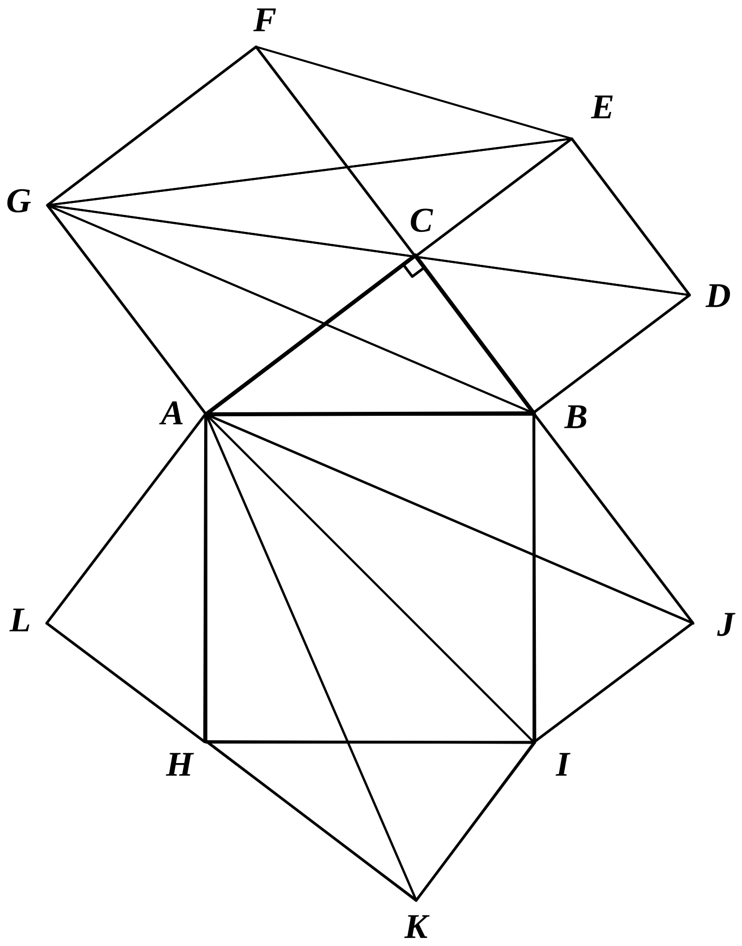
勾股定理證明-G069

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$為邊長，向外作正方形$AHIB$、正方形$CBDE$、正方形$ACFG$。
2. 將$\overline{CB}$延長至J點，使得$\overline{BJ}=\overline{AC}$，連接 $\overline{IJ}$。
3. 在$\overline{AH}$上向外作$\angle LAH=\angle CAB$，取$\overline{AL}=\overline{AC}$，連接$\overline{LH}$。
4. 將$\overline{LH}$延長至K點，使得$\overline{HK}=\overline{AC}$，連接$\overline{KI}$。
5. 連接$\overline{AJ}$、$\overline{AI}$、$\overline{AK}$。
6. 連接$\overline{FE}$、$\overline{GE}$、$\overline{GD}$、$\overline{GB}$。



【求證過程】

利用作圖建立兩個六邊形，先證明六邊形圖中有部分三角形是全等的，及兩個六

邊形在切割後的各四個三角形有面積相等關係，使得兩個六邊形面積亦相等，最後利用六邊形面積切割掉兩個三角形 ABC 面積有兩種表達式，推出畢氏定理的關係式。

1. 首先指出圖中哪些三角形與三角形 ABC 全等：

   因為 $\overline{FC}=\overline{AC}, \angle FCE=\angle ACB, \overline{EC}=\overline{BC}$ ，所以

   $$\Delta FEC \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

   因為 $\angle JBI = 180^\circ - \angle ABI - \angle CBA = 180^\circ - 90^\circ - \angle CBA = \angle CAB$ ，且 $\overline{BJ}=\overline{AC}$,

   $\overline{BI}=\overline{AB}$ ，所以

   $$\Delta BIJ \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

   因為 $\angle LAH = \angle CAB$, 且 $\overline{AL}=\overline{AC}$, $\overline{AH}=\overline{AB}$ ，所以

   $$\Delta AHL \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

   因為 $\angle KHI = 180^\circ - \angle AHI - \angle LHA = 180^\circ - 90^\circ - \angle CBA = \angle CAB$ ，且 $\overline{HK}=\overline{AC}$,

   $\overline{HI}=\overline{AB}$ ，所以

   $$\Delta HIK \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

   因此結論可得

   $$\Delta FEC \cong \Delta BIJ \cong \Delta AHL \cong \Delta HIK \cong \Delta ABC.$$

2. 接著證明三角形 EFG 、三角形 BAG 、三角形 ABJ 、三角形 AHK 皆全等：

   由上述結論中，因為 $\Delta FEC \cong \Delta ABC$ ，可知 $\overline{FE}=\overline{AB}, \angle CFE=\angle CAB$ ，又可進一步推得 $\angle GFE = \angle GFC + \angle CFE = \angle GAC + \angle CAB = \angle GAB.$

   因此由 $\overline{GF}=\overline{GA}, \angle GFE=\angle GAB, \overline{FE}=\overline{AB}$ ，故可推得

   $$\Delta EFG \cong \Delta BAG \text{ (SAS 全等)}.$$

   同理，因為 $\overline{AH}=\overline{AB}, \overline{BJ}=\overline{AG}=\overline{HK}, \angle ABJ=\angle BAG=\angle AHK$ ，所以

   $$\Delta ABJ \cong \Delta BAG \cong \Delta AHK \text{ (SAS 全等)}.$$

   因此結論可得

   $$\Delta EFG \cong \Delta BAG \cong \Delta ABJ \cong \Delta AHK.$$

3. 運用圖形間等底同高的關係，證明三角形 GDE 、三角形 GBD 、三角形 AIJ 、三角形 AIK ，此四個三角形面積皆相等：

由圖形及由第 1、2 點證明結果，可得

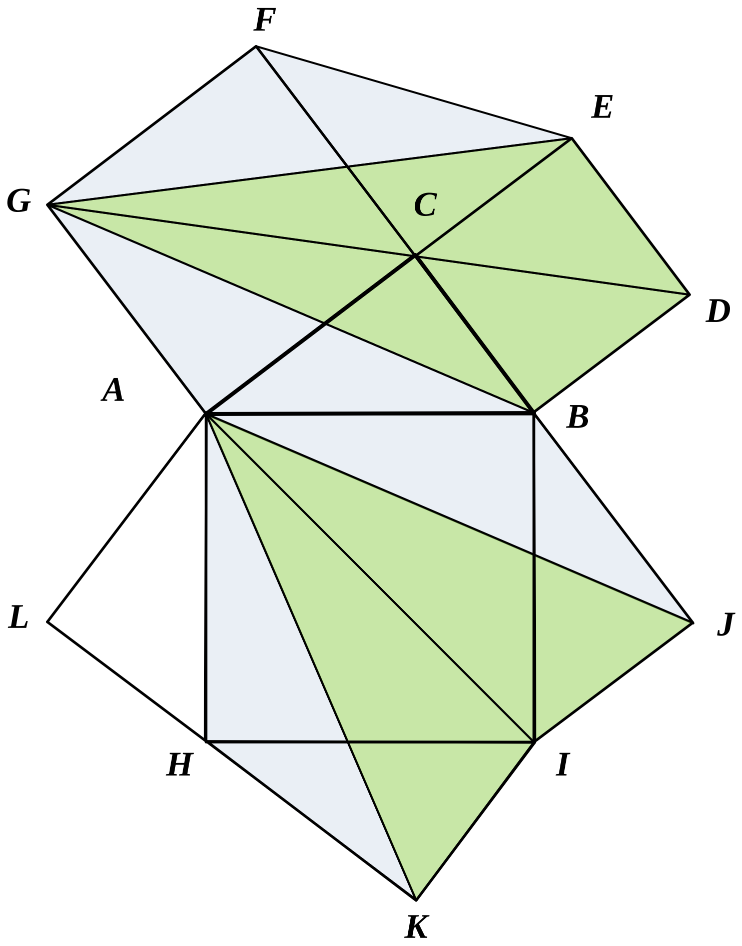
$$\Delta GDE=\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{AE}=\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times(\overline{AC}+\overline{CE})=\frac{1}{2}\times\overline{DB}\times(\overline{FC}+\overline{CB})=\frac{1}{2}\times\overline{DB}\times\overline{FB}=\Delta GBD,$$

$$\Delta GBD=\frac{1}{2}\times\ \overline{BD}\times\overline{FB}=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times(\overline{FC}+\overline{CB})=\frac{1}{2}\times\ \overline{IJ}\times(\overline{BJ}+\overline{CB})\ =\frac{1}{2}\times\overline{IJ}\times\overline{CJ}=\Delta AIJ,$$

$$\Delta AIJ=\frac{1}{2}\times\ \overline{IJ}\times\overline{CJ}\ =\frac{1}{2}\times\ \overline{IJ}\times(\overline{CB}+\overline{BJ})\ =\frac{1}{2}\times\overline{IK}\times(\overline{LH}+\overline{HK})=\frac{1}{2}\times\overline{IK}\times\overline{LK}=\Delta AIK,$$

因此

$$\Delta GDE=\Delta GBD=\Delta AIJ=\Delta AIK.$$



4. 最後由圖形間面積相等的關係，將等式整理，即可推得勾股定理的關係式：
由圖可知

$$\begin{aligned}\square\ AHIB&=\text{六邊形}AHKIJB-\Delta HIK-\Delta BIJ\\&=(\Delta AHK+\Delta AIK+\Delta AIJ+\Delta ABJ)-(\Delta HIK+\Delta BIJ)\\&=(\Delta BAG+\Delta GBD+\Delta GDE+\Delta EFG)-(\Delta FEC+\Delta ABC)\\&=\text{六邊形}ABDEFG-(\Delta FEC+\Delta ABC)\end{aligned}$$

則 $\square\ AHIB=\square\ CBDE+\square\ ACFG,$

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$，正方形 $CBHI$ 邊長為 $\overline{BC}$，所以可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：由西費城的中學生 Joseph Zelson 提出，經由他的叔叔送至魯米斯(E.S. Loomis)本人手中。
2. 心得：建立由四個三角形合成的六邊形，透過三角形拼湊而得到兩個面積相等的六邊形，其面積可相等於一個大正方形與兩個直角三角形的合成，又可相等於較小的兩個正方形與兩個直角三角形的合成，最後利用兩者面積相等的關係推得。對於高中生能夠想出此證明，已說明了他的推演能力已經超出同齡者，魯米斯也說道 Joseph 能提出該證法想必他的智商很高，此證明和 G068 都證明了青少年也可以發揮演繹能力。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
		●	●	●