勾股定理證明-G068

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$為邊長，向外作正方形$AHIB$，正方形$CBDE$、正方形$ACFG$。

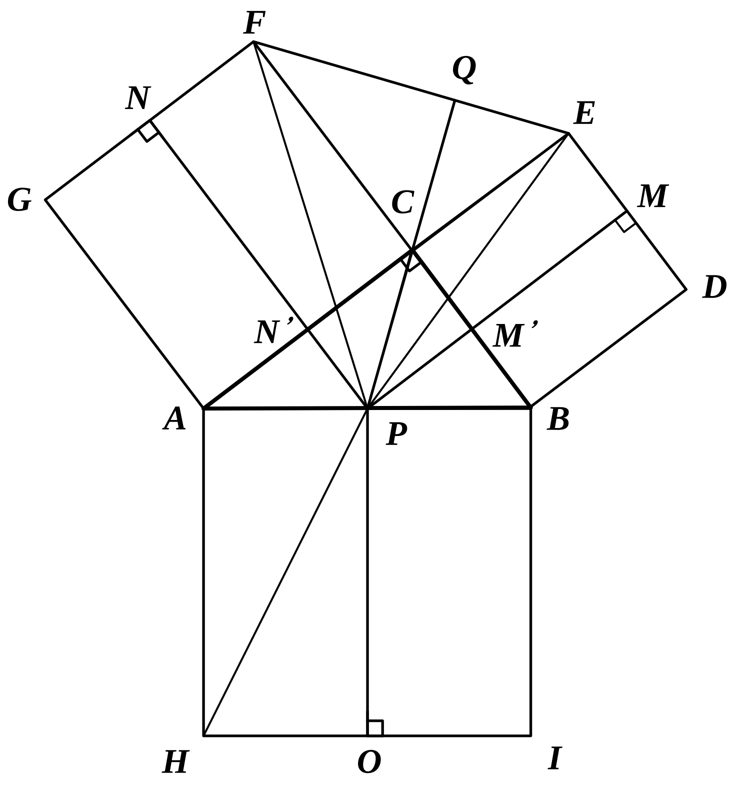
2. 在$\overline{AB}$上取中點P，從P點作$\overline{HI}$的垂線，交$\overline{HI}$於O點。

3. 從P點作$\overline{DE}$的垂線，分別交$\overline{DE}$於M點，交$\overline{BC}$於M'點。

4. 從P點作$\overline{FG}$的垂線，分別交$\overline{FG}$於N點，交$\overline{AC}$於N'點。

5. 連接$\overline{EF}$、$\overline{PE}$、$\overline{PF}$。

6. 連接$\overline{PC}$，並延長$\overline{PC}$交$\overline{EF}$於Q點。



【求證過程】

從直角三角形ABC的斜邊中點出發作輔助線和建立三角形，利用直角三角形斜邊中點到各頂點等距及平行性質推得邊長相等關係，逐步證明由輔助線所建立的三個三角形的等式關係，計算其面積，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 FEC 與三角形 ABC 全等，推得其邊長關係：

因為 $\overline{FC}=\overline{AC},\ \angle FCE=\angle ACB,\ \overline{EC}=\overline{BC}$ ，所以

$$\Delta FEC\cong\Delta ABC \quad \text{(SAS 全等)}$$

因此

$$\overline{FE}=\overline{AB}.$$

2. 利用直角三角形中斜邊之中點到各頂點等距的性質，可得邊長相等關係：

在直角三角形 ABC 中，因為 P 點為斜邊 $\overline{AB}$ 的中點，即三角形 ABC 的外心，所以

$$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}.$$

3. 證明圖中 $\overline{PQ}$ 垂直於 $\overline{EF}$ ：

首先證明三角形 FCQ 與三角形 ABC 相似：

因為 $\angle FCQ=\angle PCB$ (對頂角相等)，且 $\overline{PB}=\overline{PC}$ ，所以 $\angle PCB=\angle PBC$ ，則

$$\angle FCQ=\angle PCB=\angle PBC=\angle ABC,$$

由第 1 點結論 $\Delta FEC\cong\Delta ABC$ ，可得 $\angle CFE=\angle CAB$ ，則

$$\angle QFC=\angle CFE=\angle CAB,$$

由上述 $\angle FCQ=\angle ABC,\ \angle QFC=\angle CAB$ 可得

$$\Delta FCQ\sim\Delta ABC \text{ (AA 相似)}.$$

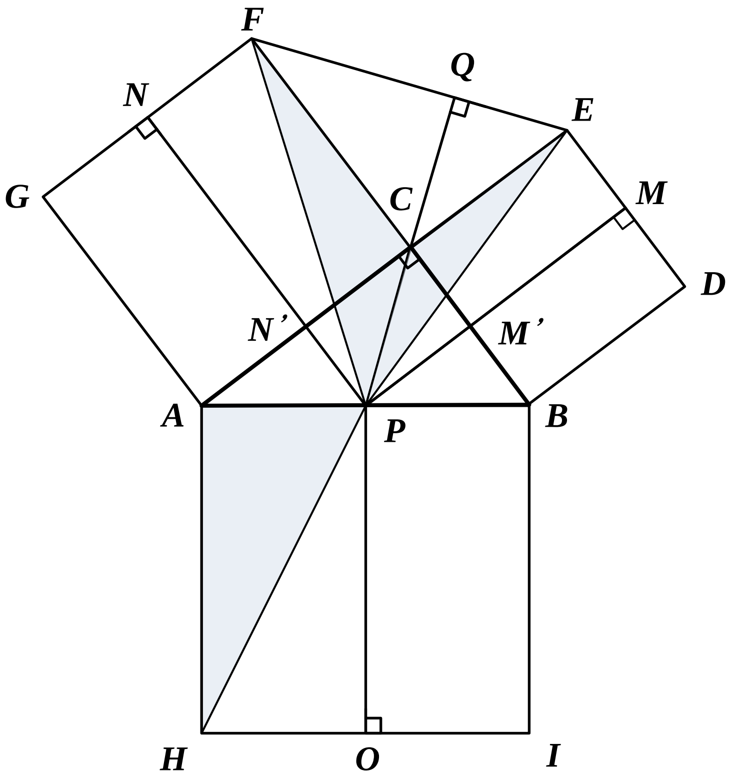
因此

$$\angle FQC=\angle ACB=90^\circ.$$

故可知 $\overline{PQ}\perp\overline{EF}$ 。

4. 由上述條件證明三角形 PCE 與三角形 PCF 的面積和相等於三角形 PAH ：

因為由圖及第 1 點結論可知 $\overline{FE}=\overline{AB}$ ，及第 2 點結論可知 $\overline{PC}=\overline{PA}$ ，所以



$$
\begin{aligned}
&\Delta PCE+\Delta PCF\\
&=\frac{1}{2}\times\overline{PC}\times\overline{QE}+\frac{1}{2}\times\overline{PC}\times\overline{QF}\\
&=\frac{1}{2}\times\overline{PC}\times(\overline{QE}+\overline{QF})\\
&=\frac{1}{2}\times\overline{PC}\times\overline{FE}\\
&=\frac{1}{2}\times\overline{PA}\times\overline{AB}\\
&=\frac{1}{2}\times\overline{PA}\times\overline{AH}\\
&=\Delta PAH
\end{aligned}
$$

5. 接著先說明 M 為 $\overline{DE}$ 之中點，N 為 $\overline{FG}$ 之中點：

因為 $\overline{PM}\perp\overline{DE}$，得 $\angle CEM=\angle PME=90°$，所以 $\overline{AE}//\overline{PM}//\overline{BD}$，又因為 P 為 $\overline{AB}$ 之中點，所以 M 為 $\overline{DE}$ 之中點，故

$$\overline{ME}=\frac{1}{2}\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{CB}.$$

同理，

$$\overline{NF}=\frac{1}{2}\overline{GF}=\frac{1}{2}\overline{AC}.$$

6. 由上述第 5 點推得的邊長關係，可將三個三角形的面積得到另一種表示式：

$$\Delta PCE=\frac{1}{2}\overline{CE}\times\overline{ME}=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{4}\overline{BC}^2=\frac{a^2}{4}$$

$$\Delta PCF=\frac{1}{2}\overline{CF}\times\overline{NF}=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{4}\overline{AC}^2=\frac{b^2}{4}$$

$$\Delta PAH=\frac{1}{2}\overline{PA}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AB}=\frac{1}{4}\overline{AB}^2=\frac{c^2}{4}$$

7. 最後由第 4、6 點結論，將等式整理，推出勾股定理的關係式：

因為 $\Delta PAH=\Delta PCE+\Delta PCF$,

所以

$$\frac{c^2}{4}=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\ ,$$

即

$$c^2 = a^2 + b.$$

【註與心得】

1. 來源：由 Ann Condit 女孩提出並於 1938 年 10 月給出證明。她是印第安納州南本德中心中學的學生。這個只有 16 歲的女孩是第一個利用從給定三角形的斜邊中點出發作輔助線和建立三角形的證法，連偉大的數學家，不管是印度的、希臘的，還是現代的都不曾作出來。
2. 心得：此證明利用直角三角形斜邊中點到各頂點等距的性質，推得輔助線所建立的三個三角形面積關係式，接著由中點和平行性質推算出其三角形面積表示式而推得勾股定理。整個證明切入的角度，要能想到實屬不易，何況是對於才中學生的作者，可用欣賞的角度看待。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
		●	●	●