勾股定理證明-G043

【作輔助圖】

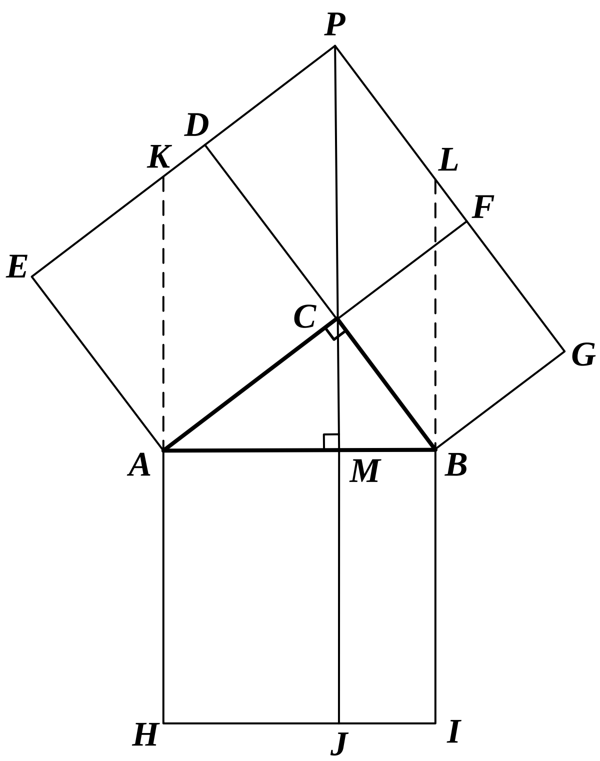
1. 分別在直角三角形 ABC 較短的兩邊 $\overline{AC},\overline{BC}$ 向外作兩個正方形 $ACDE$ 及 $BCFG$ 。

2. 將 $\overline{ED}$ 及 $\overline{GF}$ 兩延長線交於 P 點，連接 $\overline{PC}$ ，並作 $\overline{AH}$, $\overline{BI}$ 皆與 $\overline{PC}$ 平行且等長。

3. 連接 $\overline{HI}$ 得第三個四邊形 $ABIH$ 。

4. 延長 $\overline{PC}$ 交 $\overline{AB}$ 於 M 點，交 $\overline{HI}$ 於 J 點。

5. 分別將 $\overline{HA}$ 延長交 $\overline{EP}$ 於 K 點，將 $\overline{IB}$ 延長交 $\overline{GP}$ 於 L 點。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 較短的兩邊向外作兩個正方形，按帕普斯(Pappus)定理【註: 補充說明】所指示的方式得到第三個正方形，利用切割與拼湊面積的方法來證明面積和相等，最後推得出勾股定理的關係式。

1. 首先證明第三個平行四邊形 $ABIH$ 為一正方形：

先說明三角形 CPD 全等於三角形 ABC ，因為 $\overline{CD}=\overline{AC},\angle CDP=\angle ACB=90^{\circ}$,

$\overline{DP}=\overline{CF}=\overline{BC}$ ，所以 $\Delta CPD\cong\Delta ABC$ （SAS 全等)，可推得 $\overline{PC}=\overline{AB}.$

因為 $\overline{EP}//\overline{AC}$，所以 $\angle DPC=\angle ACM$，故 $\angle AMC=180°-\angle CAM-\angle ACM=$

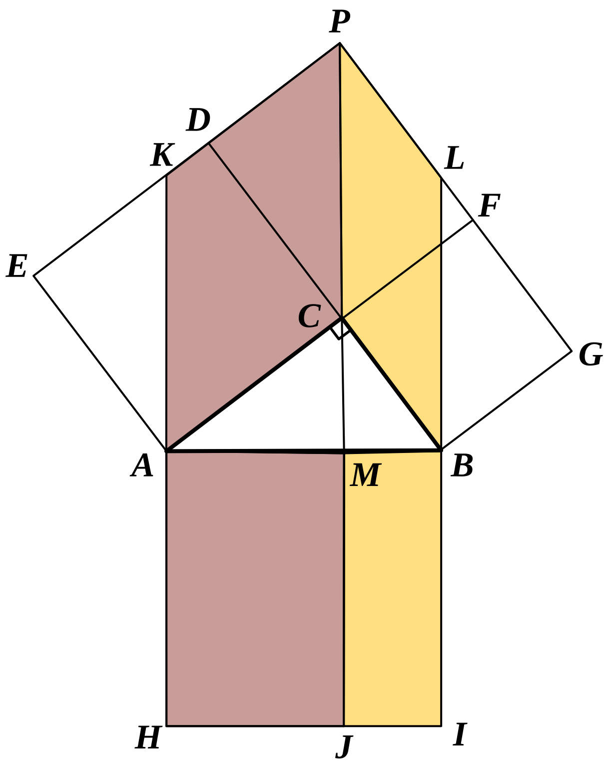
$180°-\angle DCP-\angle DPC=\angle CDP=90°$，又因為 $\overline{KH}//\overline{PJ}//\overline{LI}$，所以

$$\angle AMC=\angle MAH=\angle MBI=90°.$$

由前述，又因為 $\overline{AH}=\overline{BI}=\overline{PC}=\overline{AB}$，故可知平行四邊形 $ABIH$ 為一正方形，其邊長為 $\overline{AB}$。

2. 證明較小的兩個正方形面積和等於依帕普斯（Pappus）定理所指示的方式得到第三個正方形 $ABIH$ 面積：

因為 $\overline{AH}=\overline{BI}=\overline{PC}$ 且 $\overline{AH}//\overline{BI}//\overline{PC}$，所以



$$\begin{aligned}
&\square ACDE+\square BCFG\\
&=\overline{AC}\times\overline{AE}+\overline{BC}\times\overline{BG}\\
&=\text{▱}ACPK+\text{▱}BCPL\quad(\text{等底同高})\\
&=\overline{PC}\times\overline{AM}+\overline{PC}\times\overline{BM}\\
&=\overline{PC}\times\left(\overline{AM}+\overline{BM}\right)\\
&=\overline{AB}\times\overline{AB}\\
&=\square ABIH
\end{aligned}$$

3. 由上述面積之間的關係，即可推得勾股定理：
由第 2 點結論可知

$$\square ABIH=\square BCFG+\square ACDE,$$

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $ACFG$ 邊長為 $\overline{AC}$，正方形 $CBHI$ 邊長為 $\overline{BC}$，所以可推得

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

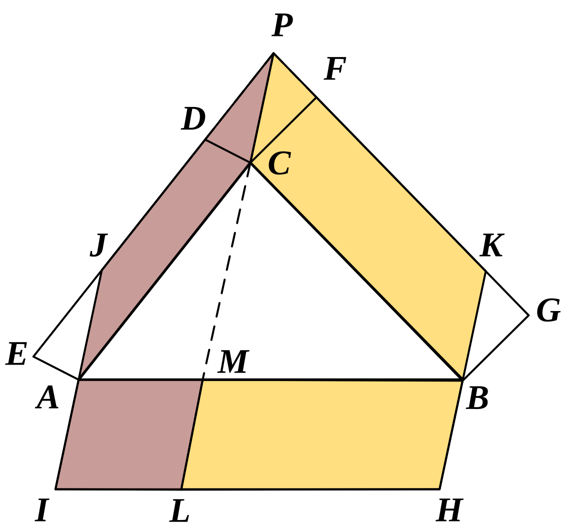
1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis)在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1933 年 10 月 26 日想到的。
2. 心得：按帕普斯（Pappus）定理所指示的方式做出第三個平行四邊形，利用面積相等的性質的方法來證明。Pappus 定理在任意三角形情況下皆可成立，而此證明是在直角三角形條件下得到較小的兩個正方形面積和相等於斜邊上的正方形。利用特殊化原則觸發本題的證明，也暗示可行的證明方法和勾股定理有關，非常具有啟發性。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
	●	●	●	

4. 補充說明：帕普斯（Pappus）定理：

帕普斯（Pappus）是西元三世紀的一位希臘數學家，在他的《數學匯編》(Mathematical Collection Book IV)敘述：假設 ABC 是一個任意三角形，$ACDE$ 及 $BCFG$ 分別是在 $\overline{AC}, \overline{BC}$ 邊上的任意平行四邊形，延伸 $\overline{ED}$ 及 $\overline{GF}$ 使其交於 P 點，並作 $\overline{AI}$, $\overline{BH}$ 皆與 $\overline{PC}$ 平行且等長，則滿足：

$$\square ABHI\text{面積} = \square ACDE\text{面積} + \square BCFG\text{面積}.$$



Pappus 定理的圖例

【證明過程】

(1)將$\overline{IA}$延長交$\overline{EP}$於J點，將$\overline{HB}$延長交$\overline{GP}$於K點。

因為$\overline{JA}//\overline{PC}$, $\overline{AE}//\overline{CD}$, $\overline{EP}//\overline{AC}$，得到

$\angle AEJ=\angle CDP, \angle EAJ=\angle DCP$, $\overline{AE}=\overline{CD}$，所以$\Delta AEJ\cong\Delta CDP$（ASA

全等)，因此$\overline{JA}=\overline{PC}=\overline{AI}$;

同理可證$\Delta BGK\cong\Delta CFP$（ASA 全等)，$\overline{KB}=\overline{PC}=\overline{BH}$。

(2)延長$\overline{PC}$交$\overline{AB}$於M點，交$\overline{IH}$於L點，$\overline{JI}//\overline{PL}$, $\overline{KH}//\overline{PL}$，則：

$\square ACDE+\square BCFG$ (等底同高)

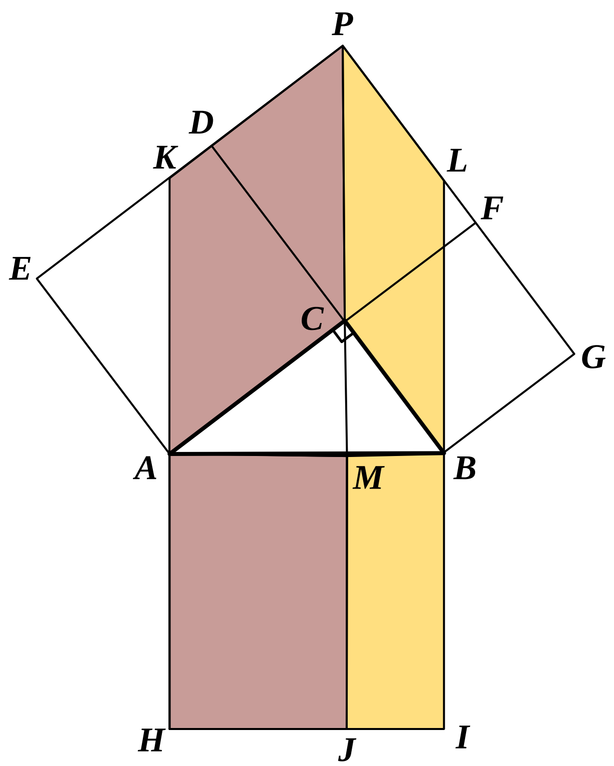
$=\square ACPJ+\square BCPK$

$=\square AMLI+\square MBHL$ (因為$\overline{AI}=\overline{BH}=\overline{PC}$, 所以等底同高)

$=\square ABHI$

結論：

因此畢氏定理為帕普斯（Pappus）定理的特殊化(將一般性三角形改為直角三角形)例子。



Pappus 定理的特殊化圖例