勾股定理證明-A050

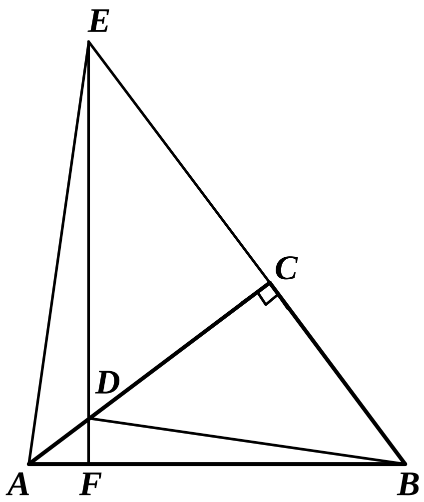
【作輔助圖】

1. 在 $\overline{AC}$ 上取一點 D，使得 $\overline{CD}=\overline{BC}$。

2. 延長 $\overrightarrow{BC}$，並在 $\overrightarrow{BC}$ 上取 $\overline{CE}=\overline{AC}$。

3. 連接 $\overline{DE}$，並將 $\overline{DE}$ 延長交 $\overline{AB}$ 於 F 點。

4. 連接 $\overline{AE}$, $\overline{BD}$。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，先說明圖中部分的三角形全等，最後將四邊形用兩個不同方式算面積，將等式整理，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 EDC 全等，並推出三角形中的角度：

因為 $\overline{BC}=\overline{CD}$, $\overline{AC}=\overline{CE}$ 且 $\angle ACB=\angle ECD=90°$，所以

$$\Delta ABC \cong \Delta EDC \text{ (SAS 全等)},$$

由此可知：$\angle BAC=\angle DEC$，可推得

$$\begin{aligned}\angle AFD &= 180°-(\angle FAD+\angle FDA)\\ &=180°-(\angle DEC+\angle CDE)\\ &=\angle DCE\\ &=90°.\end{aligned}$$

2. 最後將凹邊形利用兩種不同拆解的方式來算面積，來推出勾股定理的相關式：

凹四邊形 $ADBE$ 可以拆成三角形 BCD、三角形 ACE ，或可以寫成三角形 ABE 扣掉 ABD ，將等式整理，推論出勾股定理的相關式：

$$\Delta BCD + \Delta ACE = \Delta ABE - \Delta ABD$$
$$\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{CD} + \frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{EF} - \frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{DF}$$
$$\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AB}\times\left(\overline{EF} - \overline{DF}\right)$$
$$\frac{1}{2}\overline{BC}^{2} + \frac{1}{2}\overline{AC}^{2} = \frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{DE}$$
$$\frac{1}{2}\times\left(\overline{BC}^{2} + \overline{AC}^{2}\right) = \frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AB}$$
$$\overline{BC}^{2} + \overline{AC}^{2} = \overline{AB}^{2},$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 71). Amsterdam: A. Versluys.
2. 心得：
   此證明是利用求凹四邊形 $ADBE$ 面積的過程中推出勾股定理，利用兩種不同拆解方法來求面積，而拆解後的各個小三角形的面積則是利用三角形全等的性質來找出，每個三角形面積都不難算。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	