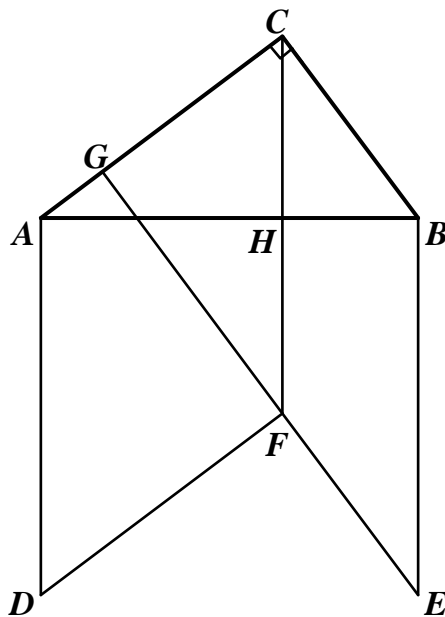


勾股定理證明-A049

【作輔助圖】

1. 作過 A 點且垂直於 \overline{AB} 的垂線 \overline{AD} 且 $\overline{AD} = \overline{AB}$ ；作過 B 點且垂直於 \overline{AB} 的垂線 \overline{BE} 且 $\overline{BE} = \overline{AB}$ ；作過 C 點且垂直於 \overline{AB} 的垂線 \overline{CF} 且 $\overline{CF} = \overline{AB}$ 。
2. 連接 \overline{DF} , \overline{EF} ，並將 \overline{EF} 延長交 \overline{AC} 於 G 點。
3. 而 \overline{AB} 與 \overline{CF} 交於 H 點。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，先說明圖中部分的三角形全等，最後將兩個平行四邊形用兩個不同方式算面積，將等式整理推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明四邊形 $BCFE$ 與四邊形 $ACFD$ 皆為平行四邊形：

因為 \overline{AD} , \overline{BE} 與 \overline{CF} 皆垂直 \overline{AB} ，可推得 $\overline{AD} // \overline{BE} // \overline{CF}$ ，又 $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$ ，所以

四邊形 $BCFE$ 與四邊形 $ACFD$ 皆為平行四邊形。

2. 三角形 ABC 與三角形 FCG 全等，並推出三角形中的角度：

因為 $\overline{CF} = \overline{AB}$ 且

$$\begin{aligned}\angle CFG &= \angle FCB \\ &= 90^\circ - \angle CBA, \\ &= \angle BAC,\end{aligned}$$

同理可推得 $\angle GCF = \angle ABC$ ，所以

$$\triangle FCG \cong \triangle ABC \text{ (ASA 全等),}$$

由此可知：

$$\angle CGF = 90^\circ.$$

3. 利用不同的底與高求平行四邊形面積，將其等式相加整理，推論出勾股定理的相關式：

在平行四邊形 $ACFD$ 中，以 \overline{CF} 為底，則高為 \overline{AH} ，又以 \overline{AC} 為底，則高為 \overline{GF} ，比較面積的不同呈現方式，整理得

$$\overline{CF} \times \overline{AH} = \overline{AC} \times \overline{FG}.$$

同理，在平行四邊形 $BCFE$ 以 \overline{CF} 為底，則高為 \overline{BH} ，又以 \overline{BC} 為底，則高為 \overline{CG} ，比較面積的不同呈現方式，整理得

$$\overline{CF} \times \overline{BH} = \overline{BC} \times \overline{CG}.$$

將上面推出的兩式相加可得

$$\begin{aligned}\overline{CF} \times \overline{AH} + \overline{CF} \times \overline{BH} &= \overline{AC} \times \overline{FG} + \overline{BC} \times \overline{CG} \\ \overline{AB} \times \overline{AH} + \overline{AB} \times \overline{BH} &= \overline{AC} \times \overline{AC} + \overline{BC} \times \overline{BC} \\ \overline{AB} \times (\overline{AH} + \overline{BH}) &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \\ \overline{AB} \times \overline{AB} &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \\ \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍與期刊：

George W. Evans (1923). A Proof Of The Theorem Of Pythagoras, *Mathematics Teacher*, 16, 440.

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (pp. 64-65). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：

此證明方法與 A048 相似，先利用三角形全等的性質，並利用圖形不同的底對應到不同的高，來找出一些等式，將其整理即可推出勾股定理，過程也不複雜，比較困難的是要能找到對應的高，只要可以找到，就很容易可以推出結論。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	