勾股定理證明-A048

【作輔助圖】

1. 從C點作$\overline{AB}$的垂線，交$\overline{AB}$於D點。

2. 將三角形ACD以$\overline{AC}$為對稱軸作出三角形ACE。

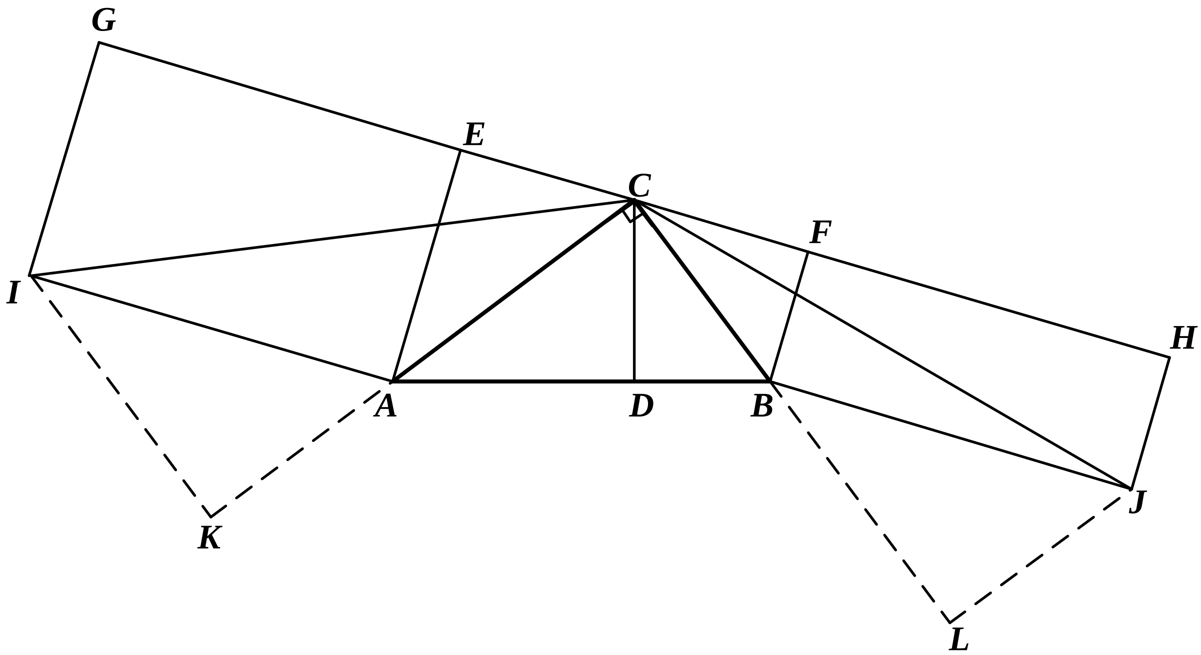
3. 將三角形BCD以$\overline{BC}$為對稱軸作出三角形BCF。

4. 分別在$\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CF}$上取$G$點及$H$點，使得$\overline{EG}=\overline{FH}=\overline{AB}$。

5. 以$\overline{AE}, \overline{EG}$為邊長作矩形$AEGI$；以$\overline{BF}, \overline{FH}$為邊長作矩形$BFHJ$。

6. 連接$\overline{CI}, \overline{CJ}$。

7. 從I點作$\overleftrightarrow{AC}$的垂線，交$\overleftrightarrow{AC}$延長線於K點；從J點作$\overleftrightarrow{BC}$的垂線，交$\overleftrightarrow{BC}$延長線於L點。



【求證過程】

在直角三角形ABC外作輔助線，先說明圖中部分的三角形全等，最後將圖中兩個三角形用兩個不同方式算面積，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形ABC與三角形IAK、三角形BJL皆全等，並推出邊長關係：

因為 $\overline{AI}=\overline{AB}$, $\angle ACB=\angle IKA=90^\circ$ 且

$$\begin{aligned}\angle KAI &= 180^\circ-\angle CAI\\ &=180^\circ-\left(90^\circ+\angle CAE\right)\\ &=90^\circ-\angle CAE\\ &=90^\circ-\angle CAD\\ &=\angle ABC,\end{aligned}$$，

可推得 $\Delta IAK\cong\Delta ABC$ (AAS 全等)，同理，可推得 $\Delta BJL\cong\Delta ABC$ ，所以

$$\Delta IAK\cong\Delta BJL\cong\Delta ABC,$$

由此可知：

$$\overline{KI}=\overline{AC},\ \overline{JI}=\overline{BC}.$$

2. 利用不同的底與高求三角形面積，推出邊長關係，將等式整理，推出勾股定理的相關式：

在三角形 ACI 以 $\overline{AI}$ 為底，則高為 $\overline{AE}$ ，又以 $\overline{AC}$ 為底，則高為 $\overline{KI}$ ，比較面積的不同呈現方式，整理得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overline{AI}\times\overline{AE}&=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{KI}\\ \overline{AB}\times\overline{AD}&=\overline{AC}\times\overline{AC}\\ \overline{AB}\times\overline{AD}&=\overline{AC}^2.\end{aligned}$$

同理，在三角形 BCJ 以 $\overline{BJ}$ 為底，則高為 $\overline{BF}$ ，又以 $\overline{BC}$ 為底，則高為 $\overline{JL}$ ，比較面積的不同呈現方式，整理得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overline{BJ}\times\overline{BF}&=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{JL}\\ \overline{AB}\times\overline{BD}&=\overline{BC}\times\overline{BC}\\ \overline{AB}\times\overline{BD}&=\overline{BC}^2.\end{aligned}$$

將上面推出的兩式相加可得

$$\overline{AB}\times\overline{AD}+\overline{AB}\times\overline{BD}=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$$
$$\overline{AB}\times\left(\overline{AD}+\overline{BD}\right)=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$$
$$\overline{AB}\times\overline{AB}=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$$
$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：

根據魯米斯在《勾股定理》這本書中寫道，這個證明是他在 1926 年 1 月 31 日想出來。

2. 心得：

此證明是先利用三角形全等的性質，並利用圖形不同的底對應到不同的高，來找出一些等式，將其整理即可推出勾股定理，過程也不複雜，比較困難的是要能找到對應的高，只要可以找到，就很容易可以推出結論。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●