勾股定理證明-A047

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AC}$為邊長向外作正方形$ACDE$。

2. 從C點作$\overline{AB}$的垂線，交$\overline{AB}$於F點。

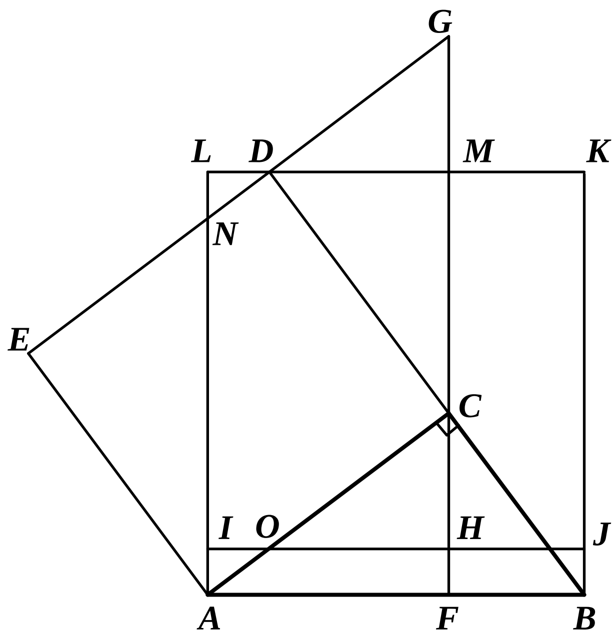
3. 將$\overline{DE}$，$\overline{CF}$延長，交於G點。

4. 在$\overline{CF}$上取一點H，使得$\overline{CH}=\overline{BF}$。

5. 從H點作$\overline{AB}$的平行線，分別在平行線上取I點及J點，使得$\overline{AF}=\overline{HI}, \overline{BF}=\overline{HJ}$。

6. 以$\overline{IJ}$為邊長向外做作正方形$IJKL$。

7. 而$\overline{CG}$與$\overline{KL}$交於M點；$\overline{AL}$與$\overline{DE}$交於N點；$\overline{AC}$與$\overline{IJ}$交於O點。



【求證過程】

在直角三角形ABC外作輔助線，先說明圖中部分的三角形全等或相似，再利用相似形「對應邊成比例」的性質，推出邊長的關係式，最後將圖中的正方形用兩個不同方式算面積，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形ABC與三角形ANE、三角形CGD全等，並推出其他邊長關係：

因為 $\overline{AE}=\overline{CD}$, $\angle EAN=\angle DCG$ 且 $\angle AEN=\angle CDG=90°$ ，所以 $\Delta ANE\cong\Delta CGD$
(ASA 全等)，同理，可推得 $\Delta ANE\cong\Delta ABC$ ，所以

$$\Delta ANE\cong\Delta CGD\cong\Delta ABC.$$

由三角形 ANE 與三角形 ABC 全等可知： $\overline{AN}=\overline{AB}$ ，整理得

$$\begin{aligned}\overline{AN}=\overline{AB}=\overline{IJ}=\overline{LI}\\ \overline{AN}=\overline{LI}\\ \overline{AI}+\overline{IN}=\overline{LN}+\overline{NI}\\ \overline{AI}=\overline{LN}.\end{aligned}$$

2. 說明矩形 $HILM$ 與正方形 $ACDE$ 面積相等：

$$\begin{aligned}\square HILM &= \overline{HI}\times\overline{IL}\\ &= \overline{HI}\times\left(\overline{IN}+\overline{LN}\right)\\ &= \overline{HI}\times\left(\overline{IN}+\overline{AI}\right)\\ &= \overline{HI}\times\overline{AN}\\ &= \square ACGL\\ &= \overline{AC}\times\overline{CD}\\ &= \square ACDE.\end{aligned}$$

3. 再證明三角形 ABC 與三角形 AFB 、三角形 CBF 皆相似：

因為 $\angle ACB=\angle AFC=90°$ 且 $\angle CAB=\angle FAC$ ，可推得 $\Delta ABC\sim\Delta ACF$ (AA 相似)，同理，可推得 $\Delta ABC\sim\Delta CBF$ ，所以

$$\Delta ABC\sim\Delta ACF\sim\Delta CBF.$$

4. 利用第 3 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 ABC 與三角形 CBF 相似可知： $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{CF}$ ，整理得

$$\overline{AB}\times\overline{BF}=\overline{BC}^2.$$

5. 最後矩形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，推出勾股定理的相關式：

將正方形 $IJKL$ 拆成矩形 $HJKM$ 、長方形 $HILM$ ，即

$$
\begin{aligned}
\square IJKL &= \square HJKM + \square HILM \\
\overline{IJ} \times \overline{IL} &= \overline{HJ} \times \overline{KJ} + \square ACDE \\
\overline{AB}^2 &= \overline{HJ} \times \overline{IJ} + \overline{AC} \times \overline{AE} \\
\overline{AB}^2 &= \overline{BF} \times \overline{AB} + \overline{AC}^2 \\
\overline{AB}^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,
\end{aligned}
$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：

   根據魯米斯在《勾股定理》這本書中寫道，這個證明是他在 1926 年 2 月 2 日想出來。

2. 心得：

   此證明是先利用三角形相似的性質，來找出一些等式，並利用拆解的方式來求輔助圖上一些圖形的面積，將其整理即可推出勾股定理，不過此證明輔助圖較複雜，可能較不容易閱讀。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	