勾股定理證明-A046

【作輔助圖】

1. 分別以 $\overline{BC}$，$\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 為邊長向外作正方形 $BCDE$、正方形 $ABFG$、正方形 $ACHI$；

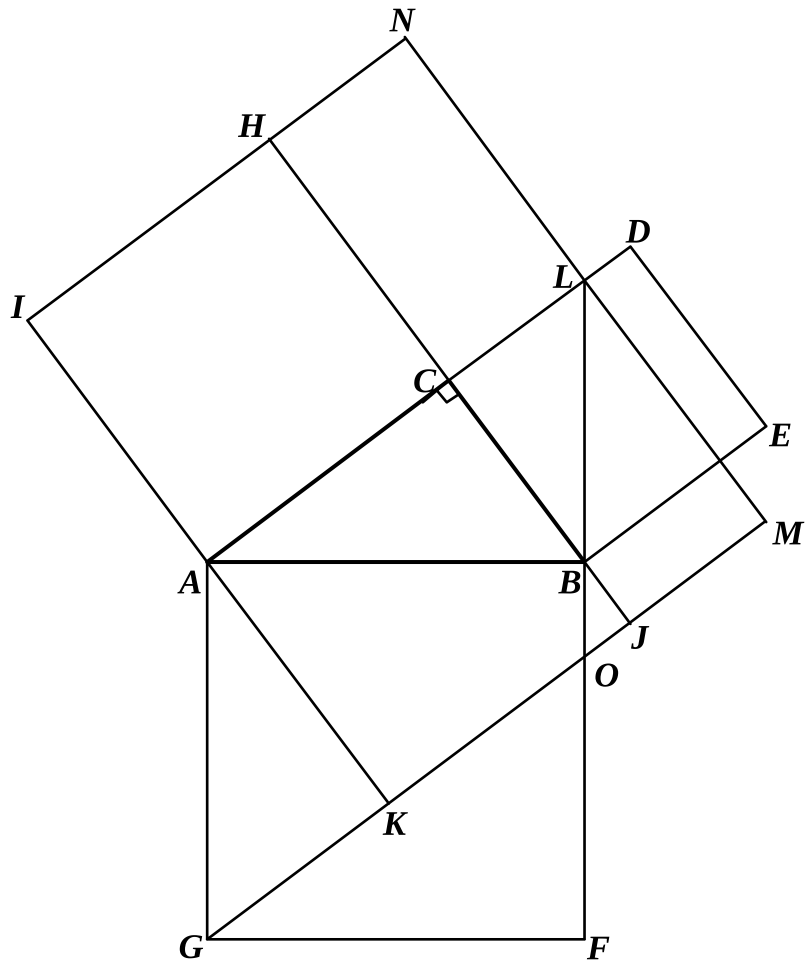
   以 $\overline{AC}$ 為邊長向內作正方形 $ACJK$。

2. 將 $\overline{BF}$ 延長，交 $\overline{AD}$ 於 L 點。

3. 分別在 $\overline{JK}, \overline{HI}$ 延長線上取一點 M, N，使得 $\overline{CJ}=\overline{LM}=\overline{LN}$。

4. 將 $\overline{BF}$ 與 $\overline{KJ}$ 的交點設為 O 點。

5. 連接 $\overline{GK}$。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，先說明圖中部分的三角形全等或相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出邊長的關係式，最後將矩形用兩個不同方式算面積，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 AGK 全等，並推論出圖中其中三點共線：

   因為 $\overline{AG}=\overline{AB}$, $\overline{AK}=\overline{AC}$ 且 $\angle GAK=90°-\angle BAK=\angle BAC$ ，所以

   $$\Delta AGK \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)}.$$

   由此可知：$\angle AKG=\angle ACB=90°$ 又 $\angle AKJ=90°$ ，可推得

   $$G-K-J \text{ 共線。}$$

2. 再證明三角形 ABC 與三角形 LOM 、三角形 AGK 皆全等：

   因為 $\overline{AK}=\overline{LM}$, $\angle AGK=\angle LOM$ 且 $\angle AKG=\angle LMO=90°$ ，所以 $\Delta AGK \cong \Delta LOM$ (AAS 全等)，又因為 $\Delta AGK \cong \Delta ABC$ ，所以可推得

   $$\Delta AGK \cong \Delta ABC \cong \Delta LOM.$$

3. 證明三角形 ABL 與三角形 GFO 全等：

   因為 $\overline{GF}=\overline{AB}$, $\angle GFO=\angle ABL=90°$ 且

   $$\begin{aligned}\angle FGO &= \angle AGF-\angle AGK\\ &= 90°-\angle ABC\\ &= \angle BAC,\end{aligned}$$

   所以

   $$\Delta GFO \cong \Delta ABL \text{ (ASA 全等)}.$$

4. 證明三角形 ABC 與三角形 ALB 、三角形 BLC 皆相似：

   因為 $\angle ACB=\angle ABL=90°$ 且 $\angle CAB=\angle BAL$,可推得 $\Delta ABC \sim \Delta ALB$ (AA 相似),同理，可推得 $\Delta BLC \sim \Delta ALB$ ，所以

   $$\Delta ABC \sim \Delta ALB \sim \Delta BLC.$$

5. 利用第 4 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 ABC 與三角形 BLC 相似可知：$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{CL}$，整理得

$$\overline{AC}\times\overline{CL}=\overline{BC}^2.$$

6. 接著說明矩形 $AKML$ 與正方形 $ABFG$ 面積相等：

$$\begin{aligned}\text{▭}AKML&=\Delta ABL+\Delta LOM+ABOK\\&=\Delta GFO+\Delta AGK+ABOK\\&=\square ABFG.\end{aligned}$$

7. 最後矩形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，推出勾股定理的相關式：

由第 6 點可知，矩形 $AKML$ 與正方形 $ABFG$ 面積相等，矩形 $AKML$ 又可以拆成矩形 $CJML$ 與正方形 $ACJK$ 相加，即

$$\begin{aligned}\square ABFG&=\text{▭}CJML+\square ACJK\\\square ABFG&=\text{▭}CHNL+\square ACHI\\\overline{AB}\times\overline{AG}&=\overline{CH}\times\overline{CL}+\overline{AC}\times\overline{AH}\\\overline{AB}^2&=\overline{AC}\times\overline{CJ}+\overline{AC}^2\\\overline{AB}^2&=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,\end{aligned}$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

   Arthur R. Colburn, LL.M. (1910). The Pons Asinorum II— New solution of the Pythagorean Theorem, *Scientific American Supplement*, *70*, 383.

2. 心得：

   此證明方法與 A044 與 A045 非常類似，皆是先利用三角形相似的性質，來找出一些等式，並利用拆解的方式來求輔助圖上一些圖形的面積，將其整理即可推出勾股定理，不過相較之前的，此證明輔助圖較複雜，過程也較冗長，閱讀起來可能會較吃力。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				