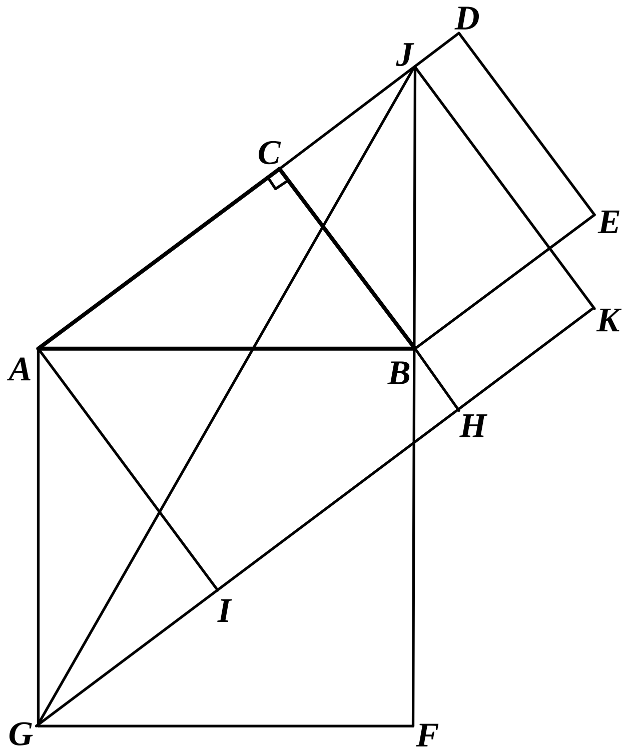
勾股定理證明-A045

【作輔助圖】

1. 分別以 $\overline{BC}, \overline{AB}$ 為邊長向外作正方形 $BCDE$ 、正方形 $ABFG$ ；以 $\overline{AC}$ 為邊長向內作正方形 $ACHI$ 。
2. 將 $\overline{BF}$ 延長，並交 $\overline{AD}$ 於 J 點。
3. 從 J 點作 $\overline{CH}$ 的平行線，交 $\overleftrightarrow{IH}$ 於 K 點。
4. 連接 $\overline{IG}$ 與 $\overline{GJ}$ 。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，先說明圖中部分的三角形全等或相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出邊長的關係式，最後將矩形用不同的兩個方式算面積，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 AGI 全等，並推論出圖中其中三點共線：

因為 $\overline{AG} = \overline{AB}$, $\overline{AI} = \overline{AC}$ 且

$$\begin{aligned}\angle GAI &= 90^\circ - \angle BAI \\ &= 90^\circ - \angle CBA \\ &= \angle BAC,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta AGI \cong \Delta ABC \text{(SAS 全等)}.$$

由此可知： $\angle AIG = \angle ACB = 90^\circ$ 又 $\angle AIH = 90^\circ$ ，可推得

$$G - I - H \text{ 共線。}$$

2. 再證明三角形 ABC 與三角形 AJB 、三角形 BJC 皆相似：

   因為 $\angle ACB = \angle ABJ = 90^\circ$ 且 $\angle CAB = \angle BAJ$，可推得 $\Delta ABC \sim \Delta AJB$(AA 相似)，同理，可推得 $\Delta BJC \sim \Delta AJB$ ，所以

$$\Delta ABC \sim \Delta AJB \sim \Delta BJC.$$

3. 利用第 2 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 ABC 與三角形 BJC 相似可知： $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{CJ}$ ，整理得

$$\overline{AC} \times \overline{CJ} = \overline{BC}^2.$$

4. 利用不同的底與高求三角形面積，將其等式比較，推出其他圖形的面積關係：

   三角形 AGJ 以 $\overline{AG}$ 為底，則高為 $\overline{AB}$ ，又改成以 $\overline{AJ}$ 為底，則高為 $\overline{AI}$ ，比較面積的不同呈現方式，整理得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overline{AG} \times \overline{AB} &= \frac{1}{2}\overline{AJ} \times \overline{AI} \\ \overline{AG} \times \overline{AB} &= \overline{AJ} \times \overline{AI} \\ \square ABFG &= \square AIKJ.\end{aligned}$$

5. 最後矩形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，推出勾股定理的相關式：

   由第 4 點可知，矩形 $AIKJ$ 與正方形 $ABFG$ 面積相等，矩形 $AIKJ$ 又可以拆成矩形 $CJKH$ 與正方形 $ACHI$ 相加，即

$$\square ABFG = \square CJKH + \square ACHI$$

$$\overline{AB} \times \overline{AG} = \overline{CJ} \times \overline{CH} + \overline{AC} \times \overline{AH}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC} \times \overline{CJ} + \overline{AC}^2$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Arthur R. Colburn, LL.M. (1910). The Pons Asinorum II— New solution of the Pythagorean Theorem, *Scientific American Supplement*, *70*, 383.
2. 心得：
   此證明方法與 A044 非常類似，皆是先利用三角形相似的性質，並利用圖形不同的底對應到不同的高，來找出一些等式，並找到圖上一些圖形的面積，將其整理即可推出勾股定理，雖然要算的圖形面積很多，但都不難求，所以是滿容易整理的。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	