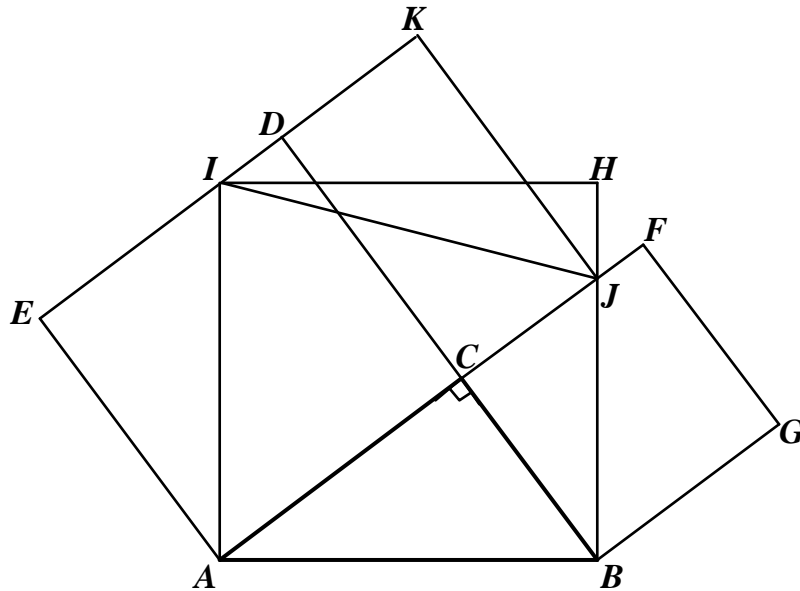


勾股定理證明-A044

【作輔助圖】

1. 分別以 \overline{AC} ， \overline{BC} 為邊長向外作正方形 $ACDE$ 、正方形 $BCFG$ ；以 \overline{AB} 為邊長向內作正方形 $ABHI$ 。
2. 假設 \overline{BH} 與 \overline{CF} 交於 J 點。
3. 從 J 點作 \overline{CD} 的平行線，交 \overline{DE} 於 K 點。
4. 連接 \overline{IJ} 。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，先說明圖中部分的三角形相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出邊長的關係式，最後將矩形用不同的兩個方式來算面積，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 AJB 、三角形 BJC 皆相似：

因為 $\angle ACB = \angle ABJ = 90^\circ$ 且 $\angle CAB = \angle BAJ$ ，可推得 $\triangle ABC \sim \triangle AJB$ (AA 相似)，同理，可推得 $\triangle BJC \sim \triangle AJB$ ，所以

$$\triangle ABC \sim \triangle AJB \sim \triangle BJC.$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 ABC 與三角形 BJC 相似可知： $\overline{AC}:\overline{BC} = \overline{BC}:\overline{CJ}$ ，整理得

$$\overline{AC} \times \overline{CJ} = \overline{BC}^2.$$

3. 利用不同的底與高求三角形面積，將其等式比較，推出其他圖形的面積關係：

三角形 AIJ 以 \overline{AI} 為底，則高為 \overline{IH} ，又改成以 \overline{AJ} 為底，則高為 \overline{AE} ，比較面積的不同呈現方式，整理得

$$\frac{1}{2} \overline{AI} \times \overline{IH} = \frac{1}{2} \overline{AJ} \times \overline{AE}$$

$$\overline{AI} \times \overline{IH} = \overline{AJ} \times \overline{AE}$$

$$\square ABHI = \square AEKJ.$$

4. 最後矩形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，推出勾股定理的相關式：

由第 3 點可知，矩形 $AEKJ$ 與正方形 $ABHI$ 面積相等，矩形 $AEKJ$ 又可以拆成長方形 $CDKJ$ 與正方形 $ACDE$ 相加，即

$$\square ABHI = \square CDKJ + \square ACDE$$

$$\overline{AB} \times \overline{AI} = \overline{CD} \times \overline{CJ} + \overline{CD} \times \overline{AC}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC} \times \overline{CJ} + \overline{AC}^2$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

Arthur R. Colburn, LL.M. (1910). The Pons Asinorum II— New solution of the Pythagorean Theorem, *Scientific American Supplement*, 70, 382.

2. 心得：

此證明是先利用三角形相似的性質，並利用圖形不同的底對應到不同的高，來找出一些等式，並找到圖上一些圖形的面積，將其整理即可推出勾股定理，雖然要算的圖形面積很多，但都不難求，所以是滿容易整理的。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	