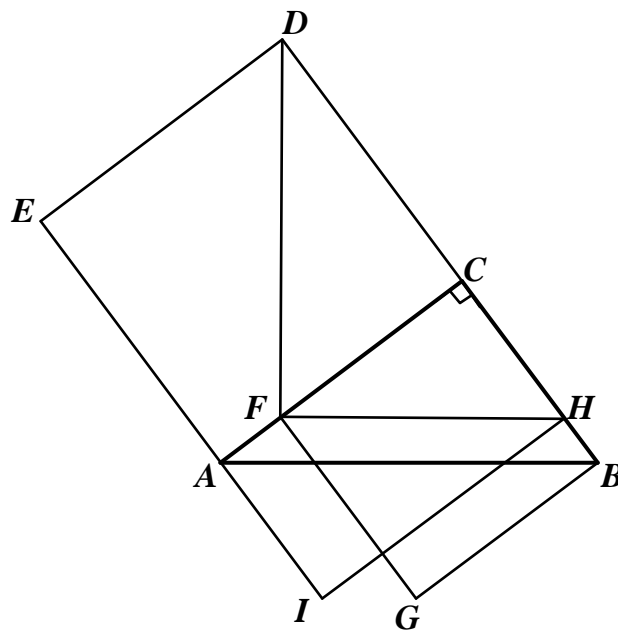


## 勾股定理證明-A043

### 【作輔助圖】

1. 以  $\overline{AC}$  為邊長向外作正方形  $ACDE$ ；以  $\overline{BC}$  為邊長向內作正方形  $BCFG$ 。
2. 連接  $\overline{DF}$ 。
3. 從  $F$  點作  $\overline{DF}$  的垂線，交  $\overline{BC}$  於  $H$  點。
4. 從  $H$  點作  $\overline{BC}$  的垂線，交  $\overline{AE}$  於  $I$  點。



### 【求證過程】

在直角三角形  $ABC$  外作輔助線，先說明圖中部分的三角形相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出邊長的關係式，最後將等式整理，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形  $ABC$  與三角形  $DFC$  全等，並推出兩三角形邊長關係：

因為  $\overline{CD} = \overline{AC}$ ， $\overline{CF} = \overline{BC}$  且  $\angle DCF = \angle ACB = 90^\circ$ ，可推得

$$\triangle DCF \cong \triangle ABC \text{ (SAS 全等),}$$

由此可知：

$$\begin{aligned}\overline{CF} &= \overline{BC}, \\ \overline{CD} &= \overline{AC}, \\ \overline{DF} &= \overline{AB}.\end{aligned}$$

2. 再證明三角形  $DFH$  與三角形  $DCF$ 、三角形  $FCH$  皆相似：

因為  $\angle DFH = \angle DCF = 90^\circ$  且  $\angle FDH = \angle CDF$ ，可推得  $\triangle DFH \sim \triangle DCF$  (AA 相似)，同理，可推得  $\triangle DFH \sim \triangle FCH$ ，所以

$$\triangle DFH \sim \triangle DCF \sim \triangle FCH.$$

3. 利用第 2 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形  $DCF$  與三角形  $FCH$  相似可知： $\overline{CF} : \overline{CH} = \overline{CD} : \overline{CF}$ ，整理得

$$\overline{CH} \times \overline{CD} = \overline{CF}^2.$$

4. 將矩形利用拆解的方式來算面積，將等式整理求出面積：

矩形  $DEIH$  可以拆成矩形  $ACHI$  與正方形  $ACDE$  相加，即

$$\begin{aligned}\square DEIH &= \square ACHI + \square ACDE \\ &= \overline{AC} \times \overline{CH} + \overline{CD} \times \overline{DE} \\ &= \overline{CD} \times \overline{CH} + \overline{CD}^2 \\ &= \overline{CF}^2 + \overline{CD}^2 \\ &= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2.\end{aligned}$$

5. 再利用第 2 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係，最後將等式整理，推出勾股定理的關係式：

由三角形  $DFH$  與三角形  $DCF$  相似可知： $\overline{DH} : \overline{DF} = \overline{DF} : \overline{CD}$

$$\begin{aligned}\overline{DF}^2 &= \overline{DH} \times \overline{CD} \\ \overline{AB}^2 &= \overline{DH} \times \overline{AC} \\ \overline{AB}^2 &= \overline{DH} \times \overline{DE} \\ \overline{AB}^2 &= \square DEIH \\ \overline{AB}^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

**【註與心得】**

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

Arthur R. Colburn, LL.M. (1910). The Pons Asinorum II— New solution of the Pythagorean Theorem, *Scientific American Supplement*, 70, 382.

2. 心得：

此證明利用三角形相似的性質，來找出一些等式，並找到一些圖形的面積，並將等式整理，即可推出勾股定理，輔助圖上雖然看起來很複雜，但其實圖形的面積都很容易求，等式也不難整理。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	